

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

34. Band, Heft 7/9

1. September 1950

S. 289—432

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

•Casanova, Gaston: *Mathématiques et matérialisme dialectique*. — Préface de J. Chapelon. Paris: Editions Sociales, 1947. 196 p. avec fig.; 225 francs.

Natucci, A.: *Intuizionismo o formalismo logico?* Archimede, Firenze 1, 239—242 (1949).

Anknüpfend an eine Bemerkung, die F. Severi bei seiner Rede zur Eröffnung des dritten Kongresses der italienischen Mathematiker-Vereinigung in Pisa im September 1948, gemacht hatte, gibt Verf. einige geschichtliche Beispiele für die Verknüpfung von Intuition und logischer Beweisführung bei der Entdeckung mathematischer Sätze und bei der Entstehung mathematischer Theorien. Er beantwortet die gestellte Frage mit dem Satz, daß für den Fortschritt der Wissenschaft beides nötig ist: Die Intuition eröffnet der Forschung neue Wege, der logische Formalismus sichert die Ergebnisse und verknüpft sie mit schon bekannten Erkenntnissen. Zum Schluß wird der moderne Begriff der mathematischen Intuition etwas genauer umschrieben.

E. Löffler (Stuttgart).

Gnedenko, B. V.: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Erkenntnis der realen Welt*. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1 (35), 3—23 (1950) [Russisch].

Beth, E. W.: *Towards an up-to-date philosophy of the natural sciences*. Methodos, Milano 1, 178—185 (1949).

Die Abhandlung ist eine kurze Übersicht über den wesentlichen Inhalt des Buches „Naturphilosophie“ des Verf. Dessen Hauptthema ist die wachsende Diskrepanz zwischen Naturwissenschaft und Philosophie, die sich u. a. auch im Existenzialismus äußert. Nach der Meinung des Verf. ist daran der Einfluß gewisser Züge der Aristotelischen Philosophie schuld, die verlangt, daß die Naturwissenschaft von einleuchtenden philosophischen Prinzipien auszugehen hat, die nicht revidiert werden dürfen. Aristoteles' Evidenzpostulat ruht auf seiner Induktionstheorie, die davon ausgeht, daß der menschliche Geist befähigt ist, die letzten Grundlagen des Naturgeschehens intuitiv zu erfassen. Descartes und Kant erkennen das Evidenzpostulat an. Für alle Philosophen dieser Richtung ist die Naturwissenschaft entweder lediglich Instrument oder deduzierbar aus einer vorgefaßten Naturphilosophie. Allerdings kann man auch die phänomenologische und die mechanistische Methode des neunzehnten Jahrhunderts bereits bei den Griechen und im Mittelalter finden. Die Methode der modernen Physik kann als eine Vermengung der früheren phänomenologischen und der konstruktiven Methoden bezeichnet werden. Als Aufgabe einer zeitgemäßen Philosophie bezeichnet Verf. den Versuch einer logischen Analyse der naturwissenschaftlichen Theorien. Er weist an einem Beispiel aus der Quantenmechanik den Nutzen dieser Analyse nach. Ein historischer Rückblick zeigt, daß die Newtonsche Logik der klassischen Physik zwei logische Systeme, eine eleatische Logik der Statik des Zeno und die Modalitätenlogik des Aristoteles als Vorgänger hat, während Eudoxus in der Astronomie bereits von der eleatischen Logik aus die Newtonsche Logik vorbereitete. Einen Übergang von der Modalitätenlogik bildet der Franzose Nicole Oresme. Da zu jeder Logik ihre eigene Ontologie und Kosmologie gehört, ist heute eine Rückkehr zu Aristoteles unmöglich. Ausführlich geht das Buch auch auf die Beziehungen zwischen Physik und Biologie ein.

Kratzer (Münster i. W.).

•Eddington, A.: *Philosophie der Naturwissenschaft*. — Aus dem Englischen übersetzt von K. Hauptvogel. (Sammlung „Die Universität“: Band 6.). Wien: Humboldt-Verlag 1949. 288 S. geb. S. 23,—.

Schrödinger, Erwin: *Die Besonderheit des Weltbildes der Naturwissenschaft*. Acta physica Austriaca 1, 201—245 (1948).

Carruccio, Ettore: *Sulla potenza dell'insieme delle proposizioni di un dato sistema ipotetico-deduttivo*. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 299—306 (1949).

Verf. setzt als Erwiderung auf Schriften anderer Philosophen die wohlbekannte Tatsache auseinander, daß die Gesamtheit der in einem logisch-axiomatischen System ableitbaren Theoreme abzählbar ist.

W. Ackermann (Lüdenscheid).

Brouwer, L.-E.-J.: Remarques sur la notion d'ordre. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 263—265 (1950).

Verf. sagt, daß eine Menge S partiell geordnet ist, wenn nach gewissen (finiten) Kriterien für jedes geordnete Paar $[a, b]$ von Elementen von S Relationen $a \equiv b$, $a < b$ oder $a > b$ angegeben werden können, derart daß gelten: (1) Reflexivität für \equiv , (2) Symmetrie für \equiv , (3) Transitivität für \equiv , (4) $a < b$ und $b > a$ implizieren sich wechselseitig, (5) Ersetzbarkeit: $a \equiv r$, $b \equiv s$ und $a < b$ ziehen $r < s$ nach sich, (6) Transitivität für $<$, (7) Asymmetrie für $<$. Hierbei sind die aussagenlogischen Operationen (also besonders die Implikation) im intuitionistischen Sinne zu interpretieren. Da der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht zur intuitionistischen Logik gehört, muß der Fall, daß er in einer partiell geordneten Menge S gilt, besonders berücksichtigt werden. Gilt also für beliebige Elemente a, b einer partiell geordneten Menge S stets entweder $a \equiv b$ oder $a \equiv b$ ist kontradiktorisch (das ist die intuitionistische Interpretation der Negation), so heißt S diskret geordnet. Gilt ferner für die Elemente a, b einer partiell geordneten Menge S , für die $a \equiv b$ kontradiktorisch ist, entweder $a < b$ oder $a > b$, so heißt S nach Verf. quasivollständig geordnet. Eine partiell geordnete Menge, die sowohl diskret als quasivollständig ist, heißt nach Verf. vollständig. Aus der Vollständigkeit einer partiell geordneten Menge folgen (auch im intuitionistischen Sinne) die Sätze der Konnexität in folgender Fassung: (8) Die simultane Absurdität von $a \equiv b$ und von $a < b$ zieht $a > b$ nach sich, (9) Die simultane Absurdität von $a < b$ und von $a > b$ zieht $a \equiv b$ nach sich. Eine partiell geordnete Menge, die den Gesetzen (8) und (9) genügt, heißt nach Verf. virtuell. Jede vollständig geordnete Menge ist also virtuell. Die umgekehrte Behauptung (die bei Zugrundelegung der klassischen Logik selbstverständlich auch gilt) gilt bei Zugrundelegung der intuitionistischen Logik jedoch nicht; eine virtuell geordnete Menge braucht sogar noch nicht einmal quasivollständig zu sein. Diese Behauptung hat Verf. in einer früheren Note (Akademie der Wissenschaften, Amsterdam, 25. Sept. 1948) durch Angabe eines Beispiels sogar für sog. natürlich geordnete Mengen (das sind Mengen, deren Ordnungskriterien eine Erweiterung einer Ordnung im üblichen Sinne liefern, die außerdem im üblichen inhaltlichen Sinne vollständig ist) bewiesen. In der vorliegenden Note zeigt Verf. weiter, daß natürlich geordnete Mengen, die quasivollständig sind, nicht mehr virtuell zu sein brauchen. Auch diese Behauptung wird gezeigt bei Zugrundelegung der intuitionistischen Logik. Verf. gibt außerdem noch ein (einfacheres) Beispiel für die entsprechende Behauptung für den Fall einer geordneten Menge, die nicht natürlich geordnet ist, an. — Die vorliegende Note ist ein recht interessanter Beitrag zur Ordnungstheorie bei Zugrundelegung der intuitionistischen Logik. Sie zeigt, daß die Begriffsbildungen im allgemeinen Fall komplizierter werden, daß aber der wesentliche mathematische Gehalt einer Theorie von der zugrunde gelegten Logik unabhängig ist (auf diesen Sachverhalt im Falle mehrwertiger Logiken hat besonders Łukasiewicz aufmerksam gemacht).

K. Schröter (Berlin).

• **Hilbert, D. und W. Ackermann:** Grundzüge der theoretischen Logik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. 27.) 3. verbesserte Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. VIII, 155 S., DM 16,50; geb. DM 19,80.

Die vorliegende 3. Auflage ist gegenüber der 2. Auflage (Berlin 1938) nur verhältnismäßig wenig verändert. Die Darstellung des Klassenkalküls ist etwas erweitert. Im engeren Prädikatenkalkül ist die Formulierung der Einsetzungsregel für die Prädikatenvariablen verbessert. Obwohl die jetzige Formulierung zutreffend (wenn auch etwas eng) ist, so tritt die Begründung der einschränkenden Bedingungen (Vermeidung von Variablen-Konfusionen und Kollisionen) keineswegs klar hervor. Auch die Darstellung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes ist verbessert. Diese ist jedoch (wie alle Darstellungen aus der Hilbertschen Schule) wenig befriedigend, da die Bedeutung der Semantik (wegen ihres nicht-finiten Charakters) nicht genügend hervortritt. Schließlich ist der Aufbau des Stufenkalküls gegenüber der 2. Aufl. wesentlich verbessert. Trotzdem ist die Darstellung immer noch viel zu knapp. Außerdem ist nach der Meinung des Ref. gerade in diesem Teil der Logik besonderer Wert auf einen handlichen Kalkül zu legen. Die vorliegende Darstellung ist aber sicherlich, sobald wirklich mathematische Theorien formalisiert aufgebaut werden sollen, nicht geeignet. — Es ist sehr zu begrüßen, daß mit dieser Neuauflage der „Hilbert-Ackermann“ endlich wieder zugänglich geworden ist. Gerade an dieser Neuauflage kann man sich aber klar machen, wie sehr ein Lehrbuch der mathematischen Logik in deutscher Sprache fehlt, das wirklich alle Resultate, besonders aber die aus der Theorie der Logik, systematisch darstellt. K. Schröter (Berlin).

Church, Alonzo: Conditioned disjunction as a primitive connective for the propositional calculus. *Portugaliae Math.* 7, 87—90 (1948).

Verf. untersucht in diesem Aufsatz denjenigen zweiwertigen Aussagenkalkül, der auf den beiden 0-stelligen Funktoren W , F und einem dreistelligen Funktor D aufgebaut ist, den er „bedingte Disjunktion“ nennt. Hierbei bedeutet $Dpqr$ in den üblichen Funktoren ausgedrückt: $(q \rightarrow p) \wedge (\bar{q} \rightarrow r)$, kann also interpretiert werden als: p oder r je nachdem ob q oder nicht q . Von E. L. Post ist gezeigt worden (*The two-valued iterative systems of mathematical logic*, *Ann. Mathematics Studies*, no 5, Princeton 1941), daß diese drei Funktoren eine vollständige Menge von unabhängigen Funktoren für den zweiwertigen Aussagenkalkül bilden. Verf. gibt zunächst für diese Behauptung einen neuen direkten Beweis an, der sich ebenfalls auf eine Methode von Post stützt [*Amer. J. Math.* 43, 167—168 (1921)]. — Die angegebene Menge von Funktoren hat darüber hinaus eine bemerkenswerte Eigenschaft, die sie für gewisse Anwendungen als besonders geeignet erscheinen läßt; sie ist nämlich selbst-dual. Schreibt man für $Dpqr$ kurz $[p, q, r]$, so erhält man nämlich zu einem Ausdruck H seinen dualen, indem man H von rechts nach links liest und W gegen F austauscht. Verf. macht ferner darauf aufmerksam, daß die angegebene Menge in einem gewissen Sinne die einfachste unabhängige, vollständige, selbst-duale Menge von Funktoren ist; nämlich dann, wenn man fordert, daß die übliche Negation ebenfalls selbst-dual definiert werden kann. Das ist hier der Fall, wie die Definition $Np \stackrel{\text{Di}}{=} [F, p, W]$ zeigt, während eine derartige selbst-duale Definition bei der einzigen unabhängigen, vollständigen, selbst-dualen Menge von höchstens zweistelligen Funktoren, nämlich C und \supset , wo $Cpq \stackrel{\text{Di}}{=} p \rightarrow q$ und $\supset pq \stackrel{\text{Di}}{=} p \leftarrow q$ ist, nicht möglich ist. — Es ist unmittelbar klar, daß das Churchsche Resultat auch auf den Aussagenkalkül mit Quantifikatoren und auf den Prädikatenkalkül der zweiten Stufe ausgedehnt werden kann, wenn man die bedingte Disjunktion, Generalisierung und Partikularisierung beim Aufbau dieser Kalküle zugrunde legt.

K. Schröter (Berlin).

Robinson, Raphael M.: Primitive recursive functions. *Bull. Amer. math. Soc.* 53, 925—942 (1947).

Die wichtigen Sätze von R. Péter über die primitiven Rekursionen [*Math. Ann.*, Berlin 110, 612—632 (1934); 111, 42—60 (1935); dies. Zbl. 10, 241, 11, 3] werden einfacher bewiesen und die Resultate erweitert. Eine primitive rekursive Funktion wird definiert als eine Funktion, die aus den Identitäts-Funktionen $I_{nk}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$, den Null-Funktionen $O_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ und der Nachfolger-Funktion $x + 1$ durch wiederholte Substitution und Rekursion nach dem Schema

$$(*) \quad \begin{aligned} F(u_1, u_2, \dots, u_n, 0) &= A(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ F(u_1, u_2, \dots, u_n, x + 1) &= B(u_1, u_2, \dots, u_n, x, F(u_1, u_2, \dots, u_n, x)) \end{aligned}$$

gewonnen werden kann. (*) ist eine Rekursion in x mit den Parametern u_1, u_2, \dots, u_n . Der Pétersche Satz, daß man alle primitiven rekursiven Funktionen erhalten kann, wenn man sich auf Rekursionen in einem Parameter beschränkt, wird neu bewiesen und folgendermaßen verschärft. Ein Schema (*), welches nur von einem Parameter u abhängt, heiße Iteration, wenn $B(u, x, y)$ nicht von u abhängt, reine Rekursion, wenn B nicht von x abhängt, und reine Iteration, wenn B weder von u noch von x abhängt. Zur Erzeugung der primitiven rekursiven Funktionen kann man sich auch auf Iterationen mit einem Parameter und, bei Hinzunahme je einer einfachen zusätzlichen Ausgangsfunktion, sogar auf reine Rekursionen oder auf reine Iterationen beschränken. Bei der Beschränkung auf reine Rekursionen wird die Vorgänger-Funktion $P(x)$ mit $P(0) = 0$, $P(x + 1) = x$, bei der Beschränkung auf reine Iterationen $Q(x)$ mit $Q(x) = 1$ für quadratisches x , $Q(x) = 0$ für nichtquadrati-

sches x , hinzugenommen. — Auch der Pétersche Satz, daß bei Hinzunahme weiterer Ausgangsfunktionen bereits Rekursionen ohne Parameter ausreichend sind, wird verschärft; insbesondere werden einfachere zusätzliche Ausgangsfunktionen angegeben. Im parameterlosen Fall entfällt die Unterscheidung von Rekursion und Iteration. Zur Erzeugung aller primitiven rekursiven Funktionen genügen 1. Rekursionen nach dem Schema $F(0) = a$, $F(x+1) = B(x, F(x))$ bei Hinzunahme von $u+x$ und $Q(x)$ oder von $|u-x|$; 2. reine Rekursionen nach dem Schema $F(0) = a$, $F(x+1) = B(F(x))$ — dies ist die Funktion $F(x) = B^x(a)$ — bei Hinzunahme von $u+x$ und $E(x)$ oder von $|u-x|$ und $Q(x)$. Hierbei ist $E(x) = x - [x^{\frac{1}{2}}]^2$, der Überschuß über ein Quadrat. Bei 2. ist die Hinzunahme von $u+x$ und $Q(x)$ nicht ausreichend. — Die Reduktionen werden mit Hilfe gewisser Paarfunktionen ausgeführt, die es gestatten, schrittweise je eine Variable auszuschalten; so wird der Pétersche Umweg über Wertverlaufsrekursionen vermieden. *Bachmann.*

Robinson, Raphael M.: Recursion and double recursion. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 987—993 (1948).

Diese Arbeit kann als eine wesentlich vereinfachte Fassung der Arbeit Math. Ann., Berlin **111**, 42—60 (1935); dies. Zbl. **11**, 3 von R. Péter bezeichnet werden. Durch die doppelte Rekursion

$$G_0(x) = x + 1, \quad G_{n+1}(0) = G_n(1), \quad G_{n+1}(x+1) = G_n(G_{n+1}(x))$$

wird eine Funktion $G_n(x)$ definiert, die alle primitiven rekursiven Funktionen majorisiert: Ist $F(x)$ eine solche, so gibt es ein n , so daß für alle x $F(x) < G_n(x)$ gilt. $G_x(x)$ ist dann nicht primitiv rekursiv. Ferner wird durch die doppelte Rekursion

$$G_0(x) = A(x), \quad G_{n+1}(0) = 0, \quad G_{n+1}(x+1) = G_n(B(x, G_{n+1}(x)))$$

eine Funktion $G_n(x)$ definiert, die alle primitiven rekursiven Funktionen erzeugt: Ist $F(x)$ eine solche, so gibt es ein n , so daß $F(x) = G_n(H(n, x))$. Dabei ist $H(n, x)$ eine feste primitive rekursive Funktion — ein Polynom vierten Grades in n, x — und $A(x), B(x, y)$ sind Funktionen, die durch Substitution aus konstanten, Identitäts-Funktionen und $x+y, x-y$ (Differenz für $x \geq y$, sonst 0), $x^2, [x^{\frac{1}{2}}], [x/2], [x/3]$ gewonnen werden können. Die Beweise stützen sich auf die vorstehend besprochene Arbeit, insbesondere auf den Satz, daß man alle primitiven rekursiven Funktionen einer Variablen von $x+1$ und $E(x)$ aus erhalten kann, indem man zur Konstruktion einer neuen Funktion $F(x)$ aus bekannten $A(x)$ und $B(x)$ die Formeln $F(x) = A(x) + B(x), F(x) = B(A(x)), F(x) = B^x(0)$ benutzt. *Bachmann.*

Lacombe, D.: Sur la méthode extensive en métamathématique. Rev. sci., Paris **85**, 515—518 (1947).

Verf. behandelt die Schwierigkeiten, die darin bestehen, die Begriffe einer mathematischen Theorie in genügender Allgemeinheit und mit hinreichender Strenge zu definieren. Er gibt der Überzeugung Ausdruck, daß dies möglich ist, wenn die von ihm sog. extensive (besser: extensionale) Methode benutzt wird. Diese besteht darin, die betr. mathematischen Begriffe durch ihren Umfang, das heißt durch die Menge der Gegenstände, auf die sie zutreffen, zu ersetzen. Der Ref. stimmt hierin vollkommen zu. Denn alle bekannten mathematischen Begriffe sind extensional; es gibt zwar durchaus ernst zu nehmende Bemühungen, auch in die Mathematik intensionale Begriffe einzuführen; diese Bemühungen haben aber bisher nicht zu wesentlichen Resultaten geführt. Die extensionale Methode führt also dazu, die betreffenden Begriffe allein mit Hilfe der üblichen Begriffsbildungen der Mengenlehre zu definieren. Verf. erläutert dies in bekannter Weise für den Funktionsbegriff und für den allgemeinen Relationsbegriff. Er kündigt an, daß es auch möglich ist, metamathematische Begriffe (wie z. B. Theorie, Axiomatisierbarkeit, Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit usw.) mit der gleichen Methode in voller Strenge und Allgemeinheit einzuführen. Er sagt, daß dies geschehen soll unter Zugrundelegung des Begriffs der „Struktur“ im Sinne von N. Bourbaki (Théorie des ensembles. Actual. sci. industr. No. 846, Paris, 1939; dies. Zbl. **26**, 389). Ref. verweist darauf, daß dieses Programm (vielleicht in etwas anderer Ausdrucksweise) schon durchgeführt ist bei A. Tarski [Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I. Mh. Math. Phys. **37**, 361—404 (1930)]; eine eingehende Theorie des auf diese Art präzisierten Begriffs eines Kalküls (bzw. einer Theorie) hat der Ref. selbst durchgeführt in seiner Arbeit: „Ein allgemeiner Kalkülbegriff“ (Leipzig 1941; dies. Zbl. **26**, 243). — Der Aufsatz des Verf. ist ein Bericht über einen Vortrag, den er am 19. 4. 1947 in

einer Sitzung des „Centre de Logique symbolique“ gehalten hat. Verf. kündigt an, daß er eine eingehende Darstellung seiner Methode in Anwendung auf metamathematische Begriffe in den „Cahiers du Centre de Logique symbolique“ geben werde. Da inzwischen von einem weiteren Autor (André Chauvin) Arbeiten publiziert worden sind, die ebenfalls durch N. Bourbaki angeregt sind, ist anzunehmen, daß von jetzt ab auch in Frankreich die mathematische Logik wieder stärker in den Vordergrund tritt, nachdem sie infolge des so sehr frühen Todes von Herbrand bisher nicht sehr hervorgetreten war.

K. Schröter (Berlin).

Chauvin, André: Structures logiques. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1085—1087 (1949).

Eine abzählbare Menge Θ heißt nach Verf. mit einer „deduktiven“ Struktur belegt genau dann, wenn es eine Mengenfamilie Γ von Mengen Φ aus endlichen Teilmengen A von Θ und für jedes derartige Φ eine Abbildung φ der Elemente $A \in \Phi$ in Θ gibt. Θ ist offenbar, inhaltlich gesprochen, die „Ausdrucksmenge“, und die Abbildungen φ liefern zu jedem $A \in \Phi$ solche Ausdrücke, die aus A unmittelbar (mit einer einzigen, durch φ charakterisierten Schlußregel) ableitbar sind. Auf Grund dieses Ansatzes lassen sich dann weitere Redeweisen (wie z. B. Negation eines Ausdrucks, Widerspruchsfreiheit einer Menge von Ausdrücken, Unentscheidbarkeit einer Aussage usw.) in der üblichen Weise formulieren. Eine abzählbare Menge A ist nach Verf. mit einer „interpretierenden Struktur“ belegt genau dann, wenn es eine abzählbare Menge N (deren Elemente bei den üblichen Darstellungen „unzerlegbare Zeichen“ genannt werden) gibt, derart, daß die Elemente von A eineindeutig den Elementen einer Teilmenge der Menge aller endlichen Folgen von Elementen von N zugeordnet werden können. Eine abzählbare Menge, die mit einer deduktiven und mit einer interpretierenden Struktur belegt ist, heißt nach Verf. mit einer „logischen Struktur“ belegt. — Auf der so erhaltenen Grundlage werden dann sogenannte „Gödelsche Logiken“ eingeführt. Diese Gödelschen Logiken sind mit einer logischen Struktur belegte abzählbare Mengen, die gerade die zusätzlichen Eigenschaften haben, daß in ihnen der Gödelsche Beweis für die Unvollständigkeit der Prinzipia Mathematica und verwandter Systeme nachgebildet werden kann. In der Zeichenmenge N , die der interpretierenden Struktur einer derartigen Logik zugrunde liegt, müssen also zunächst einmal Variablen vorkommen (dies in sich Typen einteilen lassen). Außerdem müssen durch die deduktive Struktur gewisse einfache Schlußregeln nachgebildet werden können (wie z. B. der Schluß von der Generalisierung auf die Individualisierung). Wenn diese rein logischen Bedingungen für eine Menge mit logischer Struktur erfüllt sind, spricht Verf. von einer „klassischen Logik“. Kommen in der Zeichenmenge N ferner numerische Variablen und Zeichen für 0 und die Nachfolgerfunktion vor, so spricht Verf. von einer „Peanoschen Logik“. Bei einer „Gödelschen Logik“ muß es dann schließlich noch eine eineindeutige Abbildung der Zeichen, Zeichenreihen, Ausdrücke und Beweise in die Menge der natürlichen Zahlen geben, derart, daß es zu den Relationen $R(\xi, \eta)$ über natürliche Zahlen, die bei dem Gödelschen Beweis gebraucht werden, einen repräsentierenden Ausdruck gibt. — Es ist bemerkenswert, daß Verf. bei seiner Formulierung des Unvollständigkeitssatzes sowohl die ω -Widerspruchsfreiheit als auch die Widerspruchsfreiheit voraussetzen muß. Das liegt daran, daß seine Formulierungen so schwach wie möglich gewählt sind, so daß bei ihm aus der ω -Widerspruchsfreiheit nicht die Widerspruchsfreiheit folgt. Die Formulierung auf S. 1086, Zeile 6 v. u. für die ω -Widerspruchsfreiheit ist nicht korrekt. Der Verf. hat sie selbst später korrigiert. Es muß an dieser Stelle statt „soit vraie“ heißen: „n'est pas fausse“. Die weiteren Überlegungen sind nach dieser Abänderung in Ordnung. — Der Artikel des Verf. bietet zwar inhaltlich nicht sehr viel Neues. Trotzdem ist die verhältnismäßig ausführliche Anzeige aus zwei Gründen gerechtfertigt: 1. Die durch N. Bourbaki (Théorie des ensembles, Actual. sci. industr., No. 846, Paris 1939; dies. Zbl. **26**, 389) angeregten Begriffsbildungen über „Logische Strukturen“ sind an sich von Interesse (zur Kritik vgl. vorstehende Anzeige). 2. Die vom Verf. angegebene Formulierung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes vermeidet alle überflüssigen Bedingungen, die bei der Nachbildung des Gödelschen Beweises unwesentlich sind.

K. Schröter (Berlin).

Chauvin, André: Généralisation du théorème de Gödel. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1179—1180 (1949).

Eine zahlentheoretische Aussage ist sicher unentscheidbar, wenn sie bei ihrer Rückinterpretierung nach der Methode des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes über sich selbst besagt, daß sie nicht beweisbar ist. R. Péter hat in einem Buch, das sich an einen größeren Kreis wendet [Spielereien mit dem Unendlichen. Mathematik für Liebhaber. Budapest, 1944 (Ungarisch)] darauf hingewiesen, daß es vielleicht auf diese Art möglich ist, gewisse klassische ungelöste Probleme der elementaren Zahlentheorie als unentscheidbar nachzuweisen. Das erscheint zwar dem Ref. unwahrscheinlich. Trotzdem darf die Fragestellung sicher als interessant bezeichnet werden. — Verf. präzisiert nun in der vorliegenden Note den Péterschen Ansatz, wobei er sich an seine früheren Ausführungen (s. vorsteh. Referat) anschließt. Es sei nämlich ψ eine

eindeutige Abbildung, durch die zu jedem Wert einer Funktion Φ , die jedem Ausdruck seine Gödelsche Nummer zuordnet, genau ein Wert bestimmt ist. Verf. konstruiert dann in jeder „Gödelschen Logik“ zu jedem derartigen ψ einen unentscheidbaren Ausdruck. Wenn es nun gelänge, ψ so zu spezialisieren, daß der zugehörige unentscheidbare Ausdruck etwa die Goldbachsche Vermutung ergäbe, so wäre diese damit als unentscheidbar nachgewiesen. — Die weitere vom Verf. gestellte (jedoch nicht gelöste) Frage, ob durch geeignete Wahl von ψ jede unentscheidbare Aussage erhalten werden kann, läßt sich leicht negativ entscheiden.

K. Schröter (Berlin).

Kustaanheimo, Paul: Über die Vollständigkeit der Axiomensysteme mit einem endlichen Individuenbereich. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A_I, Nr. 63, 44 S. (1949).

Verf. beschäftigt sich mit der Vollständigkeit von Axiomensystemen des einstelligen Prädikatenkalküls und des mehrstelligen Prädikatenkalküls, wenn im letzten Falle der Individuenbereich als endlich angenommen wird. Unter der Vollständigkeit eines Axiomensystems wird dabei verstanden, daß jeder Satz, der mit den in den Axiomen vorkommenden Grundprädikaten gebildet werden kann, entweder aus dem Axiomensystem ableitbar oder mit ihm unverträglich ist. Bekanntlich sind diese Probleme schon gelöst, da man für den einstelligen Prädikatenkalkül das Entscheidungsproblem beherrscht und sonst bei vorgegebener Endlichkeit des Individuenbereichs die Seinszeichen in Disjunktionen und die Allzeichen in Konjunktionen auflösen kann. Verf. gibt nun diesem Problem und seiner Lösung eine algebraische Einkleidung, indem er ausgeht von dem Körper der Restklassen mod 2, wobei 0 und 1 mit den Wahrheitswerten „richtig“ und „falsch“ identifiziert werden, aber die Konjunktion nicht mit der Addition übereinstimmt, sondern sich etwas anders ausdrückt. Jede Formel des Aussagenkalküls läßt sich dann durch eine polynomiale Gleichung des Polynomrings über dem genannten Körper, die Allzeichen und Seinszeichen mit Hilfe gewisser Produkte ausdrücken. Mit Hilfe dieser algebraischen Begriffe wird das Problem dann formuliert; die angegebene Lösung geschieht genau parallel der bekannten.

W. Ackermann (Lüdenscheid).

Szmielew, W.: Decision problem in group theory. Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 763—766 (1949).

In dem vorliegenden Vortrag entwickelt Verf. ein Entscheidungsverfahren für die Theorie T der Abelschen Gruppen, soweit sie in der ersten Stufe formalisiert werden kann. Das Entscheidungsverfahren beruht auf einer partiellen Lösung des Eliminationsproblems. Als Axiomensystem sei etwa gewählt: (1) $x + y = y + x$, (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, (3) $x + 0 = x$, (4) $\forall x \exists y \ x + y = 0$. Dann gilt: Zu jeder Aussage H aus T gibt es eine Aussage H' aus T , so daß $H \leftrightarrow H'$ beweisbar ist; hierbei ist H' aussagenlogisch aus sog. Basis-Aussagen aufgebaut; diese Basis-Aussagen lassen sich rein strukturell charakterisieren; sie besagen bei inhaltlicher Deutung: 1. Es gibt wenigstens n (paarweise verschiedene) Elemente, die linear unabhängig sind von der Ordnung p^k , bzw. 2. Es gibt wenigstens n (paarweise verschiedene) Elemente, die linear unabhängig sind mod p^k , bzw. 3. Es gibt wenigstens n (paarweise verschiedene) Elemente von der Ordnung p^k , die linear unabhängig sind mod p^k , bzw. 4. Für alle Gruppenelemente gilt: $n \cdot x = 0$. Auf Grund dieses Eliminationstheorems ergibt sich unmittelbar ein Entscheidungsverfahren. Das Eliminationstheorem läßt sich, wie üblich, auch auf beliebige Ausdrücke verallgemeinern. Ferner ergeben sich eine Reihe wichtiger wissenschaftstheoretischer Folgerungen über Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit usw. Besonders aufmerksam sei ferner auf Folgerungen gemacht, die (sog. arithmetische) Eigenschaften betreffen, die durch eine Aussage aus T ausgedrückt werden können. Diese von Tarski eingeführte Begriffsbildung ist nämlich in unserem Fall die Grundlage für eine Einteilung der Abelschen Gruppen in arithmetische Typen. Auf Grund des Resultates der Verf. lassen sich dann diese arithmetischen Typen vollständig übersehen.

K. Schröter (Berlin).

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

Riabouchinsky, Dimitri: Nouvelles remarques sur le problème de la règle des signes. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 421—424 (1950).

Es wird auseinandergesetzt, daß, wenn man von dem Rechnen mit den natürlichen Zahlen zu dem mit relativen Zahlen gemäß dem Hankelschen Permanenzprinzip fortschreitet, man dies ebensogut in der Weise tun kann, daß man die natürlichen Zahlen und die absoluten Beträge mit den negativen Zahlen identifiziert statt, wie gewöhnlich, mit den positiven. W. Ackermann (Lüdenscheid).

Jeger, M.: Eine Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks. Elemente Math., Basel **5**, 7—9 (1950).

Barbot, J.: Une relation binomiale entre les combinaisons sans répétition découverte par l'intermédiaire du jeu de belote. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français **60**, 29—33 (1949).

L'A., partant du jeu de cartes spécial appelé le jeu de belote, découvre et établit la relation suivante entre les nombres de combinaisons sans répétition C_m^p de m objets p à p :

$$C_m^p = C_h^0 C_{m-h}^p + C_h^1 C_{m-h}^{p-1} + C_h^2 C_{m-h}^{p-2} + \cdots + C_h^h C_{m-h}^{p-h}.$$

Mais cette relation est impliquée dans une formule plus générale, connue même depuis Euler déjà (voir Netto, Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig 1927, p. 12).

On sait que C_m^p est également $\binom{m}{p}$, c'est-à-dire le $p^{\text{ième}}$ coefficient de la puissance m du binôme et la formule suivante:

$$\sum_{q=0,1,\dots} \binom{r}{q} \binom{s}{t-q} = \binom{r+s}{t}$$

donne la précédente pour $r = h$, $s = m - h$, $t = p$. S. Bays (Fribourg).

Uhler, Horace Scudder: The arabian nights' factorial and the weighted-mean factorial. Scripta math., New York **15**, 94—96 (1949).

Die vorliegende Note hat in ihrem ersten Teil im wesentlichen die Wiedergabe der 890 Ziffern der Zahl $450!/10^{111}$ zum Gegenstand. Die Zahl $450!$ selbst wird vom Verf. wegen ihrer 1001 Stellen (einschl. der Nullen) etwas phantastisch als die „Fakultät der arabischen Nächte“ bezeichnet. Es wird weiter angegeben, auf welche Weise sie aus der auf S. 412 der Arbeit des Verf. in Proc. nat. Acad. Sci. USA **34**, 407—412 (1948; dies. Zbl. **31**, 58) mit ihrem exakten Wert mitgeteilten Zahl $400!/10^{99}$ ermittelt wurde; in diesem Zusammenhange werden gleichfalls die 886 Ziffern von $448!/10^{109}$ angeführt. — Ein kürzerer zweiter Teil der Arbeit dürfte weitergehendes Interesse beanspruchen; er bringt die beiden interessanten Beziehungen

$$\sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=n+1}^{n+k} i \cdot i! = (n+k+1)! - (n+1)!,$$

die nichts anderes als eine Darstellung der Fakultäten als „gewichtete“ Summen aus den jeweils vorangehenden bedeuten. G. Wünsche (München).

Lévy, Paul: Sur quelques classes de permutations. Compositio math., Groningen **8**, 1—48 (1950).

L'ordre logique des publications de l'A. sur ce sujet est le suivant: 1. le présent travail dans Compositio math., Groningen; 2. trois notes aux C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 422 et 578 (1948) et **228**, 1089 (1949); ce Zbl. **33**, 342, 7; 3. une note plus détaillée à Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 361—377 (1949); ce Zbl. **33**, 7. Ainsi le présent travail est le premier exposé en détails du problème traité. Le chapitre I a pour objet l'étude de la décomposition en cycles de la permutation P_n ; le chapitre II traite de généralisations issues immédiatement de la permutation P_n ; le chapitre III aborde l'étude, au même point de vue, de la permutation plus compliquée q_n , étude qui est alors reprise d'une manière plus approfondie dans la note 3. ci-dessus.

Les deux premières notes aux C. r. contiennent essentiellement les énoncés des principaux résultats du présent travail. *S. Bays* (Fribourg).

Halmos, Paul R. and Herbert E. Vaughan: The marriage problem. *Amer. J. Math.* **72**, 214—215 (1950).

Les AA. établissent à nouveau un lemme combinatoire utilisé ou prouvé par plusieurs: H. Weyl, C. J. Everett et G. Waples et qui paraît remonter en premier à P. Hall: Soit un groupement de jeunes hommes en nombre fini (éventuellement infini) et un nombre fini de jeunes filles. Nous supposons que chaque jeune homme est en relations de connaissance avec un certain nombre des jeunes filles. Dans quelles conditions est-il possible pour chaque jeune homme d'épouser l'une de ses connaissances? *S. Bays* (Fribourg).

Lineare Algebra. Polynome:

Garnir, H.: Sur les systèmes des matrices hermitiennes A_1, \dots, A_n vérifiant les relations $A_i A_j A_k + A_k A_j A_i = A_i \delta_{jk} + A_k \delta_{ji}$, ($i, j, k = 1, \dots, n$). *Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8^e, II. S.* **23**, Nr. 8, 28 S. (1949).

Eine von Duffin und Kemmer herrührende Fassung der Gleichungen eines Mesonfeldes (dies. Zbl. **20**, 90 und **23**, 190) bezieht sich auf Größen, die ähnlichen Relationen, wie die im Titel, genügen. Demnach ist eine für die theoretische Physik wichtige Aufgabe, die Matrizendarstellungen der Systeme von n Größen dieser Art explizit anzugeben. Verf. entwickelt eine Methode für die allgemeine Lösung dieser Aufgabe. Zunächst wird das Problem auf die Bestimmung gewisser irreduzibler Systeme reduziert. Dann wird ein Verfahren für die Konstruktion dieser irreduziblen Systeme angegeben, nach welchem eine ausführliche Behandlung der Fälle $n = 4, 5$ folgt. Endlich wird nachgewiesen, daß mit den gefundenen sämtliche irreduziblen Systeme erschöpft sind. *T. Szele* (Debrecen).

Ponting, F. W. and H. S. A. Potter: The volume of orthogonal and unitary space. *Quart. J. Math. (Oxford Ser.)* **20**, 146—154 (1949).

Es seien $X = (x_{kl})$ und $Y = (y_{kl})$ reelle n -reihige Matrizen, $X + iY = Z$. Man führe im X -Raum die euklidische Metrik ein, indem die x_{kl} als rechtwinklige kartesische Koordinaten betrachtet werden, ebenso für den Z -Raum und die x_{kl}, y_{kl} . Der $n(n-1)/2$ dimensionale Unterraum der orthogonalen Matrizen ist durch $X'X = E$ definiert; sein euklidischer Inhalt sei $v(O)$; entsprechend sei $v(U)$ der Inhalt des n^2 dimensionalen Raumes der unitären Matrizen, der durch $Z'Z = E$ definiert ist. Mit Hilfe der Cayleyschen Parameterdarstellung werden die Werte

$$v(O) = 2^{n(n+3)/4} \prod_{r=1}^n \pi^{r/2} / \Gamma(r/2), \quad v(U) = 2^{n(n+1)/2} \prod_{r=1}^n \pi^r / \Gamma(r)$$

ermittelt.

Siegel (Princeton).

Levi, F. W.: Ein Reduktionsverfahren für lineare Vektorungleichungen. *Arch. Math., Karlsruhe* **2**, 24—26 (1949/50).

Verf. beweist folgenden interessanten Satz: Es seien L_1, \dots, L_m reelle Linearformen in den Unbestimmten x_1, \dots, x_r und k_1, \dots, k_m reelle Zahlen. Wenn $\sum_{i=1}^m k_i |L_i| \geq 0$ für alle reellen x_1, \dots, x_r gilt, so besteht diese Ungleichung auch für alle Systeme von Vektoren x_1, \dots, x_r in einem beliebigen R_n . — Aus diesem Satz kann z. B. sofort die Ungleichung

$$|x + y + z| + |x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |z + x| \geq 0$$

gefolgert werden, welche zuerst von Hornich aufgestellt wurde und für welche der Ref. einen algebraischen Beweis gegeben hat (dies. Zbl. **27**, 132). Verf. beweist seinen Satz durch eine integralgeometrische Schlußweise. Er zeigt noch, daß die dabei verwendete Beweismethode auch dazu benutzt werden kann, ein

m -dimensionales Maß im R_{n+1} zu definieren. Zum Schluß folgen noch einige Bemerkungen über die Systeme von Linearformen, welche für alle reellen Wertsysteme

$$\sum_{i=1}^m k_i |L_i| \geq 0 \text{ erfüllen.}$$

Hlawka (Wien).

Jacobinski, Heinz: Über die Automorphismen einer quadratischen Form. Fysiograf. Sällsk. Lund Förhdl. 19, Nr. 8, 17 S. (1949).

Gegeben sei eine n -reihige, nicht singuläre Matrix L mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper k , dessen Charakteristik $\neq 2$ ist. Gefragt wird: unter welchen Bedingungen gibt es eine quadratische Form mit der Koeffizientenmatrix F , für welche L ein Automorphismus ist: $\dot{L}FL = F$? Welcher Äquivalenzklasse gehört ferner diese Form an? Zur Beantwortung wird die Matrix $L - xE$ ($E =$ Einheitsmatrix) in k ausreduziert. Die Determinanten der irreduziblen Bestandteile sind Potenzen $p(x)^s$ von Primpolynomen. Es bezeichne $\varrho(p(x), s)$ die Anzahl der irreduziblen Bestandteile von $L - xE$, deren Determinante $p(x)^s$ ist. L ist dann und nur dann ein Automorphismus einer nicht singulären Form, wenn erstens $\varrho(p(x), s) = \varrho(x^r p(x^{-1}), s)$ für jedes Primpolynom $p(x)$ vom Grade r ist und zweitens $\varrho(x \mp 1, 2s') \equiv 0 \pmod{2}$ für jedes s' . Diese Form ist eine Summe variablenfremder Teilformen, welche den irreduziblen Bestandteilen $p(x)^s$ mit $p(x) \mid x^r p(x^{-1})$ (selbstreziproke Faktoren) bzw. den Paaren $p(x) \cdot x^r p(x^{-1})$ irreduzibler Bestandteile mit $p(x) \nmid x^r p(x^{-1})$ (nicht selbstreziproke Faktoren) entsprechen. Zu nicht selbstreziproken Faktoren und beliebigem s sowie zu selbstreziproken Faktoren und geradem s gehören Formen, welche in k in

$$T_{2k}(x_1, \dots, x_{2k}) = x_1^2 - x_2^2 + \dots + x_{2k-1}^2 - x_{2k}^2$$

transformierbar sind. Zu einem selbstreziproken Faktor $p(x)^s$ bei ungeradem s gehört eine Form, welche in k in $T_{r(s-1)}(x_1, \dots, x_{r(s-1)}) + G(x_{r(s-1)+1}, \dots, x_{rs})$ transformierbar ist; dabei besitzt G einen Automorphismus mit dem charakteristischen Polynom $p(x)$. Ist $L - xE$ irreduzibel und selbstreziprok und ist F die Matrix einer nicht singulären Form mit der Eigenschaft $\dot{L}FL = F$, so hat die allgemeinste Form, für welche L ebenfalls ein Automorphismus ist, die Matrix $F \cdot f(L + L^{-1})$, wo f ein Polynom mit Koeffizienten in k ist. — Die Sätze werden speziell auf den Fall angewendet, wo k reell abgeschlossen ist, und schließlich andeutungsweise auch auf Hermitesche und alternierende Formen übertragen.

Eichler (Münster).

Gagaev, B. M.: Der Satz von Landau für Polynome. Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 2 (24), 229—233 (1948).

Einfache Folgerungen aus Abschätzungen der symmetrischen Funktionen eines Polynoms $\sum_0^n a_v z^v$ führen zu einem Radius R derart, daß alle Polynome n -ten Grades mit festgehaltenem Koeffizientenpaar a_0, a_m ($m \leq n$) in $|z| < R$ ungleich 0, 1 bleiben. Aber $R = R(a_0, a_m)$ ist nur unter gewissen Zusatzbedingungen genaue obere Grenze. Ein Anschluß an die (bei $a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$) für alle regulären Funktionen $a_0 + a_m z^m + \dots$ [$\neq 0, 1, \infty$ in $|z| < R$] bekannte genaue obere Grenze (Landau-Carathéodory) kommt von hier aus noch nicht in Frage.

Egon Ullrich (Gießen).

Brown, Ferdinand L.: Remarks concerning tri-operational algebra. III. Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. 8, 61—67 (1948).

Es sei $K[x]$ der Integritätsbereich aller Polynome in einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus dem Körper K . Ist $f(x)$ ein Polynom in $K[x]$, so induziert dieses Polynom die Abbildung $g(x) \rightarrow f[g(x)]$ von $K[x]$ in sich. Ist $h(x)$ ein zweites Polynom in $K[x]$, so kann man fragen, unter welchen Umständen die obige Abbildung zu einer Permutation des Restklassenbereichs $K[x]/(h(x))$ führt. Diese

Frage wird hier erschöpfend unter der Voraussetzung behandelt, daß K der aus p^n Elementen bestehende endliche Körper ist, und daß $h(x)$ die Form $(x^{p^n} - x)^m$ hat. [Für Teil I und II s. Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. 5/6, 11—15 (1944), 7, 61—64 (1946):] Reinhold Baer (Urbana, Illinois).

Gruppentheorie:

Bates, Grace E. and Fred Kiokemeister: A note on homomorphic mappings of quasigroups into multiplicative systems. Bull. Amer. math. Soc. 54, 1180—1185 (1948).

Eine unendliche Quasigruppe H mit neutralem Element e läßt sich immer in eine Quasigruppe G so einbetten, daß es einen Homomorphismus von G mit dem Kern H auf ein multiplikatives System M gibt, welches keine Quasigruppe ist (Kern = Menge der Elemente aus G , welche dasselbe Bild wie e haben). Für eine endliche Quasigruppe H ist das nicht möglich. Ausgehend von einem multiplikativen System aus vier Elementen wird M konstruiert nach einem Verfahren, welches allgemeiner den folgenden Satz liefert: Ein multiplikatives System I kann in ein multiplikatives System eingebettet werden, in welchem die beiderseitige Division ausführbar und — soweit nicht schon in I mehrdeutig — sogar eindeutig ist.

Pickert (Tübingen).

Sholander, Marlow: On the existence of the inverse operation in alternation groupoids. Bull. Amer. math. Soc. 55, 746—757 (1949).

Der Begriff Gruppoid ist hier nicht im Sinne des Ref. verstanden [Math. Ann., Berlin 96, 360—366 (1926)], sondern so, wie ihn Ore unter Nichtbeachtung der älteren Bezeichnung überhaupt für Systeme mit einer Verknüpfungsoperation eingeführt hat. Im besonderen bezeichnet ein alternatives Gruppoid (alternation groupoid) hier ein System, dessen Elemente unbeschränkt und eindeutig gemäß der Beziehung $(a b) (c d) = (a c) (b d)$ verknüpft werden können. — Verf. gibt zunächst einige Beispiele für die Anwendung dieses Begriffes und untersucht dann für ein beliebiges derartiges System S gewisse Teilsysteme L, L^*, L^{**} . L umfaßt alle links regulären Elemente a , für welche aus $ax = ay \quad x = y$ folgt, L^* alle Elemente b , deren sämtliche Potenzen links regulär sind, und L^{**} alle links eigentlichen Elemente c , für die bei beliebigem x die Gleichung $c y = x$ auflösbar ist. Dann gilt $L \supset L^* \supset L^{**}$ und L^*, L^{**} sind ebenfalls alternative Gruppoiden, dagegen ist das bei L nur der Fall, wenn $L^* = L^{**}$. Besondere Bedeutung kommt den Systemen zu, für welche $L = L^*$. Die vom Verf. behandelte Frage der Einbettung eines alternativen Gruppoids in ein umfassenderes erfordert so viele Hilfsbetrachtungen, daß auf die Abhandlung selbst verwiesen werden muß.

Brandt (Halle).

Tamari, Dov: Les images homomorphes des groupoïdes de Brandt et l'immersion des semi-groupes. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1291—1293 (1949).

Verf. untersucht homomorphe Abbildungen des vom Ref. eingeführten Gruppoids [Math. Ann., Berlin 96, 360—366 (1926)] und ihre Bedeutung für Gruppen und gruppenähnliche Systeme, wie Halbgruppen, Semigruppen und Assoziative. Er stellt folgende Sätze auf: Eine homomorphe Abbildung eines Gruppoids auf eine Gruppe ist stets und auf eine Semigruppe nur dann möglich, wenn diese zugleich Gruppe ist. Die Einbettung einer Semigruppe in eine Gruppe gelingt dann und nur dann, wenn die Semigruppe homomorphes Abbild eines Teils eines Gruppoids ist. — Dem Wunsch des Verf. auf Klärung der Terminologie kann sich Ref. nur anschließen.

Brandt (Halle).

Baer, Reinhold: Direct decompositions. Trans. Amer. math. Soc. 62, 62—98 (1947).

Dem bekannten Krull-Schmidtschen Theorem von der Isomorphie der direkten Zerlegungen beliebiger Operatorgruppen mit Doppelkettensatz in direkt unzerlegbare

Komponenten wurde von Koříněk ein „Verfeinerungssatz“ für Operatorgruppen mit einer gewissen Minimalbedingung gegenübergestellt, der besagt, daß zwei direkte Zerlegungen einer der betrachteten Gruppen in beliebige Komponenten stets isomorphe Verfeinerungen besitzen. Andererseits weiß man von Beispielen, daß Operatorgruppen existieren, für die ein entsprechendes Theorem bestimmt nicht gilt. — Verf. gewinnt nun auf einem neuen Wege einen weiteren, sowohl die Schmidtschen als auch die Koříněkschen Ergebnisse umfassenden Verfeinerungssatz, wobei für die Komponenten der verfeinerten Zerlegungen nicht nur die übliche Zentralisomorphie, sondern eine i. a. wesentlich schärfere Austauschisomorphie nachgewiesen wird. Die erhaltenen Resultate sind so weitreichend, daß es nicht ausgeschlossen erscheint, durch weiteren Ausbau der benutzten Methode bis zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit eines Verfeinerungssatzes vorzudringen. Die Beweise arbeiten weitgehend nur mit Systemen von Untergruppen; an einzelnen Stellen muß aber auch mit Elementen gerechnet werden. Indessen wird das im wesentlichen nur bei dem Gruppenzentrum nötig, dessen Behandlung bekanntlich in der Theorie der direkten Zerlegungen den eigentlich schwierigen Punkt darstellt. Unter diesen Umständen gelten die gewonnenen Sätze nicht nur für nichtkommutative, sondern auch für nichtassoziative Gruppen („loops“); denn auch bei einer „loop“ bildet das Zentrum eine gewöhnliche Abelsche Gruppe. — Das für die Verfeinerungstheorie des Verf. grundlegende Axiom läßt sich kurz so formulieren: Es seien $L = A_1 \oplus A_2 = B_1 \oplus B_2$ zwei direkte Zerlegungen von L ; α_i bzw. β_i sei derjenige Endomorphismus von L , der jedem Gruppenelement seine A_i -Komponente hinsichtlich der ersten bzw. seine B_i -Komponente hinsichtlich der zweiten Zerlegung zuordnet. Ferner bedeute ζ den Endomorphismus $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_1$, von dem man zeigen kann, daß er L auf eine Untergruppe des Zentrums abbildet, und es werde unter $R(\zeta)$ die Untergruppe aller der L -Elemente verstanden, denen eine hinreichend hohe Potenz ζ^i von ζ das Einheitselement zuordnet. Dann wird gefordert, daß zu $R(\zeta)$ eine eindeutig bestimmte, der Natur der Dinge nach notwendig im Zentrum enthaltene komplementäre Gruppe C existiert, die der Gleichung $L = C \oplus R(\zeta)$ genügt. Dieses, auf den ersten Blick gekünstelt erscheinende Axiom ist in Wirklichkeit der Eigenart des Problems ausgezeichnet angepaßt. Seine große Tragweite kann daraus erschen werden, daß es — von anderen wichtigen Fällen abgesehen — unter den folgenden Bedingungen stets erfüllt ist: 1. Wenn S der Minimalkettenbedingung genügt und zu keiner echten Faktorgruppe isomorph ist. 2. Wenn S der Maximalkettenbedingung genügt und zu keiner echten Untergruppe isomorph ist.

Krull (Bonn).

Baer, Reinhold: The role of the center in the theory of direct decompositions. Bull. Amer. math. Soc. 54, 167—174 (1948).

Im Anschluß an die vorsteh. besprochene Arbeit untersucht Verf. genauer die Bedeutung des Gruppenzentrums für seine Theorie der direkten Zerlegung. Die Eigenart der von früheren Fassungen wesentlich abweichenden „Verfeinerungstheorie“ des Verf. kann kurz so charakterisiert werden: Sind $L = A_1 \oplus A_2 = A_3 \oplus A_4$ zwei direkte Zerlegungen der (i. a. weder kommutativen noch assoziativen) Gruppe L und bedeutet $A_i = A_{i1} \oplus A_{i2}$ ($i = 1, \dots, 4$) eine direkte Zerlegung von A_i , so sollen die Zerlegungen $L = A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{22} = A_{31} \oplus A_{32} \oplus A_{41} \oplus A_{42}$ kanonische Verfeinerungen der ursprünglichen Zerlegungen $L = A_1 \oplus A_2 = A_3 \oplus A_4$ genannt werden, wenn bei Zugrundelegung der Konvention „ $A_{ik} = A_{i'k}$, falls $i = i'$ “ (4)“ die Gleichungen $A_{ik} \oplus A_{i+1,k} = A_{i+1,k} \oplus A_{i+2,k}$ gelten. Dann läßt sich der Kernsatz der Verfeinerungstheorie des Verf. so formulieren: Ist S direkter Summand von L , so besitzt jedes Paar direkter Zerlegungen von S in je zwei Komponenten kanonische Verfeinerungen. — Hat man erst einmal die fundamentale Bedeutung des Kernsatzes erkannt, so wird auch die schon immer beobachtete entscheidende Bedeutung des Zentrums für die Zerlegungstheorie völlig durchsichtig.

Sie beruht einfach auf dem vom Verf. in der vorliegenden Note bewiesenen Theorem: Der Kernsatz gilt dann und nur dann für L , wenn er für das Zentrum von L richtig ist. Krull (Bonn).

Baer, Reinhold: Direct decompositions into infinitely many summands. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 519—551 (1948).

In der vorliegenden Arbeit wird die in den beiden vorsteh. besprochenen Veröffentlichungen entwickelte Theorie der direkten Zerlegung beliebiger, i. a. weder kommutativer noch assoziativer Gruppen von dem Fall endlich vieler auf den allgemeinen Fall beliebig vieler Komponenten ausgedehnt. Den Ausgangspunkt bildet das in den früheren Arbeiten im Mittelpunkt stehende scharfe Verfeinerungstheorem, das sich mit den direkten Zerlegungen einer Gruppe in je zwei Untergruppen befaßt. Allein mit Schlüssen, die an dieses spezielle Theorem anknüpfen, kann die Isomorphie zweier direkten Zerlegungen einer Gruppe in beliebig viele direkt irreduzible Komponenten gezeigt werden. Zusatzüberlegungen verbandstheoretischer Art erfordert ein zweites Haupttheorem, ein allgemeiner Verfeinerungssatz für solche Gruppen, bei denen eine gewisse Untergruppe des Zentrums entweder der Maximal- oder der Minimalbedingung genügt. Der benutzte Isomorphiebegriff fordert mehr als bloße Zentralisomorphie. Andererseits ist er schwächer als der den Untersuchungen über direkte Zerlegungen in endlich viele Komponenten zugrunde gelegte, sehr scharfe Begriff der Austauschisomorphie. — Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, daß bei den Beweisen (anders als früher bei den schärferen Verfeinerungssätzen für endliche Zerlegungen) nirgends mit Elementen gerechnet werden muß. Gearbeitet wird ausschließlich mit dem teilweise geordneten System der zulässigen und normalen Untergruppen der gegebenen Operatorgruppe. Auf diese Weise gelingt es, den Rahmen der Gruppentheorie zu sprengen, und von vornherein eine allgemeine direkte Zerlegungstheorie modularer, durch eine gewisse Additivitätseigenschaft ausgezeichnete Verbände zu entwickeln. — Was die genauere Formulierung dieser Eigenschaft sowie die verbandstheoretische Definition von direkter Zerlegung und Isomorphie angeht, so sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Krull.

Szele, Tibor: Sur la décomposition directe des groupes abéliens. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1052—1053 (1949).

Verf. beweist 1. Sind die Ordnungen der Elemente einer primären abelschen Gruppe G beschränkt — genau $\leq p^k$ —, so ist jede zyklische Untergruppe mit p^k Elementen Summand einer direkten Zerlegung von G . 2. Jede nichttorsionsfreie abelsche Gruppe G hat einen direkten Summanden vom Typ (p^n) , wo n eine geeignete natürliche Zahl oder unendlich ist — der Fall, daß bereits G von diesem Typus ist, ist natürlich auch zuzulassen. Verf. bemerkt, daß diese Sätze, sofern es sich um abzählbare Torsionsgruppen handelt, aus der vollständigen Strukturtheorie dieser Gruppen von Ref. unmittelbar folgen. Die obigen Verallgemeinerungen auf Gruppen, für die eine solche Strukturtheorie nicht vorliegt, sind aber keineswegs neu. 1. findet man zwar nicht an der von Verf. zitierten Stelle bei R. Baer, sondern R. Baer, dies. Zbl. **9**, 155, und hinsichtlich 2. hat jedenfalls L. Kulikoff den im wesentlichen gleichwertigen Satz bewiesen: Jede gemischte Gruppe hat eine nichttriviale Zerlegung, dies. Zbl. **25**, 299. Vom Verf. bereits angegebene Druckfehler: Zeile 7 Schluß „Torsionsgruppen“ statt „Gruppen“, zwölftletzte Zeile „($u > 0$, $p \nmid v$)“ und außerdem Zeile 14 „reduzibel“, statt „irreduzibel“ nach Ansicht von Ref. Ulm.

Higman, G.: Note on a theorem of R. Baer. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 321—327 (1949).

R. Baer hat folgenden wichtigen Satz bewiesen: [Bull. Amer. math. Soc. **50**, 143 (1943)]: Wenn die Klasse (= Länge der absteigenden Zentrenreihe) aller Gruppen mit dem Exponenten (= k. g. V. der Ordnungen der Elemente) n durch n beschränkt wird, ist n eine Primzahl. Verf. erweitert dieses Resultat außerordentlich, in dem er zeigt: „Es gibt eine unendliche Folge von ganzen Zahlen: $A(0) = 1$, $A(1) = 3, \dots$

$A(M), \dots$, von der Beschaffenheit: Ist p eine Primzahl und q eine Potenz von p mit $(q-1) > (p-1)A(M)$, so existiert eine endliche Gruppe, deren Exponent ein Teiler von q ist und deren M -te Kommutatorgruppe von einer beliebigen vorgegebenen Zahl übertreffenden Klasse ist“. Dieser Satz beantwortet zugleich auch die noch offengebliebene Frage, ob nicht wenigstens die Reihe der Ableitungen durch q als Exponenten beschränkt wird, in verneinendem Sinn. *Grün* (Berlin).

Higman, Graham, B. H. Neumann and Hanna Neumann: Embedding theorems for groups. *J. London math. Soc.* **24**, 247—254 (1950).

In dieser sehr bemerkenswerten Arbeit wird eine Reihe wesentlich neuer gruppen-theoretischer Sätze von grundlegender Bedeutung bewiesen. Diese sind: Irgend zwei isomorphe Untergruppen einer Gruppe G sind konjugiert in einer geeigneten Obergruppe von G . — Jede Gruppe G läßt sich in eine Gruppe G' derart einbetten, daß je zwei Elemente gleicher Ordnung von G konjugiert in G' sind. — Enthält die Gruppe G kein Element ($\neq 1$) endlicher Ordnung, so läßt sich G immer zu einer solchen Gruppe G^* erweitern, in der sämtliche Elemente ($\neq 1$) eine einzige Klasse konjugierter Elemente bilden; und zwar ist G^* eine abzählbare Gruppe, insofern G abzählbar ist. Die so entstehenden Gruppen G^* sind die ersten Beispiele für einfache abzählbare Gruppen ohne Elemente endlicher Ordnung. — Jede abzählbare Gruppe läßt sich in eine Gruppe mit zwei Erzeugenden einbetten. Folglich ist irgendeine abzählbare Gruppe ein homomorphes Bild einer Untergruppe der freien Gruppe mit zwei Erzeugenden, welche letztere also als der „universale Träger“ sämtlicher abzählbarer Gruppen anzusehen ist. Es ist aber wesentlich, daß hier ein doppeltes Einengungsverfahren angewendet wird, nämlich Untergruppenbildung und homomorphe Abbildung. Läßt man nur das eine dieser beiden Verfahren zu, so gibt es keinen universalen Träger mit zwei Erzeugenden für sämtliche abzählbaren Gruppen, wie Verf. zeigen. — Das wesentliche Hilfsmittel der klaren und schönen Beweise ist das freie Produkt von Gruppen mit verschmolzenen Untergruppen. *T. Szele.*

Baer, Reinhold: Extension types of Abelian groups. *Amer. J. Math.* **71**, 461—490 (1949).

Zwei Obergruppen G und H der Gruppe S werden über S äquivalent genannt, wenn es einen Isomorphismus von G auf H gibt, der S elementweise fest läßt. Andererseits rechnet Verf. G und H zum gleichen Erweiterungstyp (über S), wenn je ein Homomorphismus von G in H und ein solcher von H in G existiert, der alle Elemente von S sich selbst zuordnet. Offenbar bedeutet die Zugehörigkeit zum gleichen Erweiterungstyp weniger als Äquivalenz über S . Sind z. B. G und H über S äquivalent, so besitzen alle direkten Summen $G \oplus T_1$ und $H \oplus T_2$ denselben Erweiterungstyp, während von Äquivalenz über S bei zwei beliebigen derartigen Summen nicht mehr die Rede sein kann. In der vorliegenden Arbeit bestimmt Verf. zu einer beliebigen Abelschen Gruppe S alle möglichen Erweiterungstypen für solche Obergruppen G , bei denen 1. G/S nur Elemente endlicher Ordnung enthält und 2. in G/S keine Elemente der Primzahlordnung p existieren, falls es in S unendlich viele Elemente dieser Ordnung gibt. Die verschiedenen Typen werden charakterisiert durch Systeme von „Loewy-Ketten“ in S . Der heikelste Punkt ist der Nachweis, daß zu jedem möglichen Invariantensystem zugehörige Erweiterungen vorhanden sind; dabei treten die wesentlichen Schwierigkeiten schon im Falle endlicher Abelscher Gruppen auf. Hervorgehoben seien noch die Hauptsätze: Zwei zugelassene Erweiterungen G und H gehören dann und nur dann zum gleichen Typ, wenn G und H über S äquivalente direkte Summanden besitzen; G und H sind dann und nur dann über S äquivalent, wenn sie zum gleichen Erweiterungstyp gehören und isomorph sind. *Krull* (Bonn).

Baer, Reinhold and Christine Williams: Splitting criteria and extension types. *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 729—743 (1949).

Die Arbeit schließt sich einerseits an die vorsteh. besprochene Untersuchung

(Baer II) an, andererseits an: R. Baer, Splitting endomorphisms (Baer I, dies. Zbl. 34, 13). In § 1 und § 2 werden im Sinne von Baer I Bedingungen dafür hergeleitet, daß ein Endomorphismus η einer i. a. nichtkommutativen Operatorgruppe G normal aufspaltend ist, d. h. daß zur Normaluntergruppe $R(\eta)$ aller der $a \in G$, die durch eine hinreichend hohe Potenz von η auf das Gruppeneinheitsselement abgebildet werden, eine in G normale Untergruppe S existiert, die der Gleichung $G = R(\eta) \oplus S$ genügt. Dabei stehen in § 1 Loewysche Kompositionsreihen, in § 2 der Begriff der Fastperiodizität eines Endomorphismus η hinsichtlich einer Untergruppe S von G im Vordergrund. - In § 3 wurden die gewonnenen Ergebnisse benutzt, um, wieder für beliebige Operatorgruppen, im Sinne von Baer II hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß bei zwei Obergruppen G und H aus der Zugehörigkeit zum gleichen Erweiterungstyp über S auf die Existenz von zwei über S äquivalenten direkten Summanden G_1, H_1 geschlossen werden kann. (Vgl. hierzu in Baer II einen der beiden für gewöhnliche Abelsche Gruppen aufgestellten, im Referat hervorgehobenen Hauptsätze.) — In einem Anhang wird schließlich gezeigt: Eine Gruppe G mit endlich vielen Erzeugenden, bei der ein Endomorphismus immer aufspaltend ist, wenn er normale Untergruppen von G ausnahmslos wieder auf normale Untergruppen abbildet, ist niemals zu einer echten Quotientengruppe isomorph. Krull (Bonn).

Gol'fand, Ju. A.: Über einen Isomorphismus zwischen Gruppenerweiterungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1123—1125 (1948) [Russisch].

Einer der Haupt-Nachteile der Schreierschen Erweiterungs-Theorie besteht darin, daß zwischen den mit ihrer Hilfe konstruierten Erweiterungen G einer Gruppe A durch eine Gruppe B Isomorphismen bestehen können, die sich nicht aus den komplizierten Schreierschen Bedingungen ablesen lassen. Verf. skizziert eine Methode, alle Isomorphismen einer besonderen Art zwischen Erweiterungen aufzustellen. Jede Erweiterung G besteht aus Paaren (α, a) mit $\alpha \in B$, $a \in A$, und zwei Bestimmungsstücke sind für das Erweiterungs-Problem wesentlich: der Automorphismus $\mu(\alpha)$, $\alpha \in B$ und das Faktor-System $m(\alpha, \beta)$ $\alpha, \beta \in B$. Diese müssen die Schreierschen Bedingungen erfüllen. Die Menge \mathfrak{M} aller Erweiterungen von A durch B läßt sich also durch Paare (m, μ) charakterisieren, und das Isomorphismus-Problem ist gelöst, wenn eine Klassen-Einteilung dieser Paare bekannt ist, bei der Paare derselben Klasse und nur sie isomorphe Erweiterungen liefern. Nun enthält jede Erweiterung einen zu A isomorphen Normalteiler A_0 , der durch die Paare $(1_B, a)$ erzeugt wird. Verf. nennt einen Isomorphismus zwischen zwei Erweiterungen G und H von der ersten Art, wenn er die Gruppe A_0 von G auf die entsprechende Gruppe A_0 von H abbildet, und entwickelt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Isomorphismus von der ersten Art zwischen zwei Erweiterungen G und H der Gruppe A durch die Gruppe B . Dies geschieht durch Betrachtung von „Matrizen“ $\left(\varphi^u(\alpha)_\psi\right)$ von Tripeln, wobei φ ein Automorphismus von B , ψ ein Automorphismus von A und $u(\alpha)$ eine Abbildung von B in A ist, bei der die Einheit 1_B in die Einheit 1_A übergeht. Zwischen diesen Matrizen definiert Verf. eine Multiplikation, die sie zu einer Gruppe machen, und eine Rechts-Multiplikation von Paaren (α, a) und Paaren (n, v) mit Matrizen $\left(\varphi^u(\alpha)_\psi\right)^*$ durch explizite Formeln, die hier nicht wiedergegeben werden können. Die Transformationen von $\mathfrak{M}: (n, v) \rightarrow (n, v) \left(\varphi^u(\alpha)_\psi\right)$ sind im allgemeinen nicht transitiv, und das Hauptergebnis des Verf. ist, daß die Transitivitäts-Gebiete dieser Transformationen die Klassen isomorpher Erweiterungen von der ersten Art völlig charakterisieren. Satz. Zwischen zwei Erweiterungen G und H einer Gruppe A durch eine Gruppe B besteht ein Isomorphismus von der ersten Art dann und nur dann, wenn die ihnen entsprechenden Paare

(n, r) in demselben Transivitäts-Gebiet der Transformationen $(n, r) \rightarrow (n, r) \begin{pmatrix} \varphi u(\alpha) \\ \psi \end{pmatrix}$ von \mathfrak{M} liegen. — Andere Methoden zur Behandlung des Isomorphismus-Problems sind von R. Baer [Math. Z. **38**, 375—416 (1934); dies. Zbl. **9**, 11], P. Hall [J. reine angew. Math. **182**, 206—214 (1940); dies. Zbl. **23**, 300], G. Szekeres [Trans. Amer. math. Soc. **66**, 1—43 (1949)] in speziellen Fällen entwickelt worden.

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Sesekin, N. F.: Zur Theorie der speziellen Gruppen ohne Torsion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 185—188 (1950) [Russisch].

Verf. beweist einige Sätze über die Struktur von speziellen torsionsfreien Gruppen. Speziell heißt eine Gruppe, in der jede echte Untergruppe von ihrem Normalisator verschieden ist; torsionsfrei, wenn sie keine Elemente endlicher Ordnung $\neq 1$ besitzt. Die Struktur der speziellen Gruppen, deren Abelsche Untergruppen alle die Minimal-Bedingung erfüllen, ist von S. N. Černikov (dies. Zbl. **31**, 6) weitgehend aufgeklärt; über spezielle Gruppen, deren Abelsche Gruppen alle die Maximal-Bedingung erfüllen, siehe die Arbeit des Ref. „On infinite soluble groups II“ [Proc. London math. Soc., n. S. **44**, 336—348 (1938); dies. Zbl. **2**, 11] und ferner A. I. Mal'cev (dies. Zbl. **33**, 246; insbesondere Satz 7). In der gegenwärtigen Arbeit betrachtet Verf. allgemeine, d. h. keinen Kettenbedingungen unterworfen, torsionsfreie spezielle Gruppen. Er zeigt (Satz 1), daß in einer solchen Gruppe die Ausziehung der m -ten Wurzel, wenn überhaupt möglich, dann eindeutig ist, d. h. daß aus $x^m = y^m$ folgt $x = y$. Weiter (Satz 3), daß, wenn die Gruppe mindestens eine maximale Abelsche Untergruppe endlichen Ranges hat, sie ein nicht-triviales Zentrum besitzt. Das wichtigste Resultat ist Satz 4: Wenn in einer speziellen torsionsfreien Gruppe alle Abelschen Untergruppen endlichen Rang besitzen, dann hat die Gruppe eine endliche aufsteigende Zentralreihe, deren Faktoren alle Abelsche torsionsfreie Gruppen endlichen Ranges sind. Hieraus ergibt sich als Korollar: Eine spezielle torsionsfreie Gruppe mit Maximal-Bedingung für Abelsche Untergruppen besitzt eine endliche Zentralreihe, deren Faktoren alle Gruppen von ganzzahligen Linearformen endlichen Ranges sind. Dieses Resultat ist schon vom Ref. a. a. O. bewiesen worden.

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Mjagkova, N. N.: Über Gruppen endlichen Ranges. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 495—512 (1949) [Russisch].

Will man bei der Betrachtung unendlicher auflösbarer, nilpotenter oder p -Gruppen zu handgreiflichen Resultaten kommen, so muß man irgendwelche Endlichkeits-Bedingungen auferlegen. Bisher ist dies fast ausschließlich in der Form von Kettensätzen (Maximal-Bedingung oder Minimal-Bedingung) oder Postulaten der Periodizität oder lokalen Endlichkeit der Gruppe geschehen. Verf. untersucht unendliche auflösbare, nilpotente und p -Gruppen, die endlichen Rang besitzen. Der Begriff des Ranges kann bei unendlichen Gruppen auf verschiedene Arten definiert werden, von denen die beiden folgenden die wichtigsten sind: 1. Die Gruppe G hat allgemeinen Rang R , wenn R die kleinste Zahl mit der Eigenschaft ist, daß ein beliebiger endlicher Komplex von G in einer Untergruppe von nicht mehr als R Erzeugenden liegt. 2. Die Gruppe G hat speziellen Rang r , wenn r die kleinste Zahl mit der Eigenschaft ist, daß die von einem beliebigen endlichen Komplex erzeugte Untergruppe nicht mehr als r Erzeugende hat. Natürlich ist $r \geq R$, und, wie das Beispiel der freien Gruppe mit n Erzeugenden zeigt, für die $R = n$, $r = \infty$ ist, braucht das Gleichheitszeichen nicht zu stimmen. Verf. legt in ihrer Arbeit meist den speziellen Rang zugrunde. Die Endlichkeit des Ranges ist im wesentlichen eine lokale Eigenschaft im Gegensatz zu den Kettensätzen, die die Struktur der Gruppe im Ganzen betreffen. (Zum Rangbegriff vgl. A. I. Mal'cev, Mat. Sbornik, n. S. **22**, 351—352 (1948).] Wir geben im folgenden nur die Hauptresultate der Verf., ohne auf die Methoden einzugehen oder sie mit den Ergebnissen

anderer Autoren zu vergleichen. Für die allgemeine Behandlung der auflösbaren und nilpotenten Gruppen siehe A. Kurosch und S. N. Černikov [Uspechi mat. Nauk 2, 19—59 (1947)]. Satz 1. Eine periodische Gruppe G endlichen speziellen Ranges mit einer auflösbaren Menge, die nach aufsteigender Größe einfach geordnet ist, besitzt einen Abelschen Normalteiler A , der ein direktes Produkt quasi-zyklischer Gruppen ist [quasi-zyklisch = vom Typ (p^∞)]. In der Faktorgruppe G/A sind die Sylowgruppen für jedes p endlich und konjugiert. — Es folgt ein Beispiel einer auflösbaren periodischen Gruppe endlichen allgemeinen Ranges, die unendlichen speziellen Rang hat. Dagegen zeigt Satz 2: Eine nilpotente Gruppe endlichen allgemeinen Ranges hat auch endlichen speziellen Rang. Weiter werden lokal-endliche p -Gruppen endlichen speziellen Ranges untersucht. Satz 3. Eine lokal-endliche p -Gruppe endlichen Ranges ist auflösbar, abzählbar, und erfüllt die Minimal-Bedingung. Hierbei benutzt man das interessante Lemma: Eine lokal-endliche p -Gruppe endlichen Ranges ist von ihrer Kommutator-Gruppe verschieden. Satz 4. Eine lokal-nilpotente periodische Gruppe G endlichen Ranges r hat einen Abelschen Normalteiler A , der direktes Produkt quasi-zyklischer Gruppen ist. Die Faktorgruppe G/A ist direktes Produkt endlicher p -Gruppen für verschiedene Primzahlen p . Umgekehrt ist die Erweiterung einer periodischen Abelschen Gruppe endlichen Ranges durch ein direktes Produkt endlicher p -Gruppen für verschiedene p , aber mit gleichmäßig beschränkten Rängen, eine periodische lokal-nilpotente Gruppe endlichen Ranges. Satz 5. Eine lokal-nilpotente torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges ist nilpotent. Hieraus folgt noch, daß lokal-nilpotente Gruppen endlichen Ranges abzählbar sind. Satz. 6. Eine Gruppe endlichen Ranges hat dann und nur dann eine aufsteigende Zentralreihe, wenn sie lokal-nilpotent ist. Ob eine periodische lokal-nilpotente Gruppe endlichen speziellen Ranges immer auflösbar ist, bleibt ein wichtiges unentschiedenes Problem.

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Piccard, Sophie: Classes de substitutions d'un groupe imprimitif. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 693—695 (1949).

L'A. considère un groupe imprimitif G de substitutions des éléments $1, \dots, n$ ($n \geq 4$). Soit E_1, E_2, \dots, E_p une répartition des n éléments en p systèmes imprimitifs de k élément chacun. Comme on le sait, chaque substitution de G qui change un élément d'un système E_i en un élément d'un système E_j change tout le système E_i en E_j . Soit S une substitution de G ; si r ($r \geq 1$) de ces systèmes imprimitifs E_i sont liés transitivement par S , l'A. dit qu'ils constituent une classe de systèmes d'imprimitivité du groupe G relativement à S . Soit maintenant s le nombre total de ces classes relatives à S et q le nombre total des cycles de S , y compris ceux d'ordre 1. La substitution S est dite de classe C_1 si le nombre $(k+1)s + p + q$ est pair et de classe C_2 si ce nombre est impair. — Maintenant sur cette répartition des substitutions de G dans les deux classes C_1 et C_2 , l'A. donne un certain nombre de propriétés trop longues à développer ici.

S. Bays (Fribourg).

Piccard, Sophie: Les classes de substitutions d'un groupe imprimitif et les bases d'un groupe imprimitif saturé. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1193—1195 (1949).

Soit pour $n \geq 4$ le groupe imprimitif G de degré n et E_1, E_2, \dots, E_p les p systèmes imprimitifs des éléments $1, 2, \dots, n$. L'A. appelle le groupe G saturé par rapport aux systèmes d'imprimitivité E_j ($j = 1, 2, \dots, p$), si G contient toutes les substitutions du groupe symétrique S_n qui admettent les ensembles E_j ($j = 1, 2, \dots, p$) pour systèmes d'imprimitivité. Dans ce cas la répartition des éléments de G en systèmes imprimitifs est unique; le nombre p des systèmes imprimitifs et le nombre k de leurs éléments sont des invariants de G . — L'A. donne sur la question des bases (couples de substitutions génératrices) d'un tel groupe un certain nombre de résultats; le résultat le plus général me paraît être: Quels que soient les entiers $k \geq 2$ et $p \geq 2$, le nombre total des bases de G , saturé par rapport aux systèmes d'imprimi-

mitivité $E_i = \{i, i + p, \dots, i + (k-1)p\}$ ($i = 1, 2, \dots, p$), est un multiple de l'ordre $N = p!(k!)^p$ de G , si $k > 2$; il est un multiple de $N/2$ si $k = 2$. *Bayes*.

Kaloujnine, Léo: La structure des p -groupes de Sylow des groupes symétriques finis. *Ann. sci. École norm. sup.*, III. S. 65, 239—276 (1948).

Verf. untersucht die p -Sylow-Gruppen (p -S. Gr.) der symmetrischen Gruppen von der Ordnung $n!$. Die Theorie dieser p -S. Gr. für beliebige n läßt sich sofort reduzieren auf den Spezialfall, daß n eine Potenz p^m ist. Die Untersuchung führt Verf. nach einer eigenen Methode, die alle die p -S. Gr. P_m von S_{p^m} betr. Probleme in Probleme über Polynome in $m-1$ Variablen im $GF(p)$ verwandelt (vgl. Verf., dies. Zbl. 30, 102, 31, 198). Es werden zunächst die bekannten Sätze über die auf- bzw. absteigende Zentrenreihe von P. Hall wiederholt. Dann werden verschiedene ausgezeichnete Untergruppen, charakteristische Untergruppen und Faktorgruppen mit Hilfe der genannten Polynome charakterisiert. Speziell wird bewiesen: In P_m fallen die auf- und die absteigende Zentrenreihe zusammen. Weiter wird noch eine Beziehung zwischen den vom Verf. eingeführten „sous-groupes parallélotopiques“ (G. P.) und den charakteristischen Untergruppen von P_m aufgestellt: Jede ausgezeichnete G. P. ist charakteristisch in P_m und umgekehrt: Jede charakteristische Untergruppe von P_m ist eine ausgezeichnete G. P. Schließlich wird die Gruppe P_2 in allen Einzelheiten studiert. Die Methode des Verf. dürfte noch auf weitere die p -Gruppen betr. Probleme anwendbar sein. *Grün* (Berlin).

Szele, T.: Über die endlichen Ordnungszahlen, zu denen nur eine Gruppe gehört. *Comment. math. Helvetici* 20, 265—267 (1947).

Beweis des Satzes: Zu einer Ordnungszahl n gibt es dann und nur dann nur eine einzige Gruppe von der Ordnung n , wenn $(n, \varphi(n)) = 1$ ist. Der Beweis stützt sich auf einen Satz von Frobenius über Gruppen von der Ordnung $a \cdot b$, wobei a quadratfrei und jeder Primfaktor von b größer als der größte Primfaktor von a ist. *Grün* (Berlin).

Hua, L. K. and I. Reiner: On the generators of the symplectic modular group. *Trans. Amer. math. Soc.* 65, 415—426 (1949).

Bekanntlich läßt sich die Modulgruppe aus den beiden Substitutionen $\tau \rightarrow \tau + 1$ und $\tau \rightarrow -\tau^{-1}$ erzeugen. Verff. behandeln das entsprechende Problem für die sog. Modulgruppe n -ten Grades, welche von den Substitutionen $T \rightarrow (AT + B)(CT + D)^{-1}$ mit ganzzahligen n -reihigen Matrizen A, B, C, D und $AB' = BA', CD' = DC', AD' - BC' = E$ gebildet wird, und geben eine Basis von 4 unabhängigen Erzeugenden an. Es wird auch gezeigt, daß die unimodulare Gruppe in $n(>1)$ Dimensionen durch die drei Substitutionen $x_1 \rightarrow x_1 + x_2$ und $x_1 \rightarrow -x_1$ und $x_1 \rightarrow x_n, x_2 \rightarrow x_1, \dots, x_n \rightarrow x_{n-1}$ erzeugt wird. *Siegel*.

Tits, J.: Généralisations des groupes projectifs. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. 35, 197—208 (1949).

L. E. J. Brouwer a démontré que le groupe continu triplement transitif de la droite est homéomorphe au groupe des homographies de la droite. Plusieurs auteurs s'occupaient dès lors de ce sujet — p. ex. B. Kerékjartó et P. Libois — et l'A. du présent mémoire gagnait quelques motifs de P. Libois. Il s'occupe d'une généralisation des transformations projectives de la droite et établit des théorèmes concernant cette généralisation. — Soit E un ensemble d'éléments quelconques, au moins au nombre trois. Un groupe de transformations propres (c'est-à-dire biunivoques et réciproques) de E est appelé triplement transitif sur E , si à deux triples quelconques d'éléments (p, q, r) et (p', q', r') correspond une transformation du groupe et une seule qui change le triple (p, q, r) en (p', q', r') . La transformation dégénérée (p, q) transforme p en tous les éléments de E , et tous les éléments de E en q . Nous appellerons groupe triplement transitif „au sens large“ de transformations de E , l'ensemble G obtenu en adjoignant à un groupe triplement transitif toutes les transformations dégénérées de E . — L'A. construit un formalisme approprié

à l'étude des groupes triplement transitifs. En utilisant cette formalisme il démontre que toute transformation propre du groupe G peut s'exprimer sous l'une des formes suivantes

$$y = ax + b, \quad y = \frac{a}{x+c} + b.$$

F. Kárteszi (Budapest).

Kaplan, Samuel: Extensions of the Pontrjagin duality. I: Infinite products. Duke math. J. 15, 649—658 (1948).

Verf. stellt die Frage nach einer Abgrenzung der Klasse der kommutativen topologischen Gruppen mit Pontrjaginscher Dualität, d. h. derjenigen Gruppen, für die die Charaktergruppe der Charaktergruppe wieder vom Typus der Ausgangsgruppe wird. Zu dieser Klasse gehören nach Pontrjagin die lokalkompakten; daß sie mit ihnen nicht erschöpft ist, zeigt das Resultat der vorliegenden Arbeit: Für eine beliebige, nicht notwendig abzählbare Indizesmenge $\{\lambda\}$ seien die beiden Systeme $\{G_\lambda\}$, $\{H_\lambda\}$ von kommutativen topologischen Gruppen G_λ , H_λ vorgelegt. Gilt dann bei jedem λ für G_λ und H_λ die Pontrjaginsche Dualität, so auch für die Produkte $\prod G_\lambda$ und $\mathfrak{P} H_\lambda$, die folgendermaßen erklärt sind: 1. $\prod G_\lambda$ ist die Menge aller einzeiligen Matrizen $g = \{g_\lambda\}$, für die nach Tychonoff [Über die topologische Erweiterung von Räumen; Math. Ann., Berlin 102, 544—561 (1930)] die Gruppenverknüpfung mittels der Komponenten g_λ und die Umgebungen $U = U(U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_k})$ durch alle endlichen Systeme $\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_k}\}$ von Umgebungen $U_{\lambda_i} \subseteq G_{\lambda_i}$ ($k = 1, 2, \dots$; $i = 1, \dots, k$) definiert werden; zu U gehören alle und nur die $g = \{g_\lambda\}$ mit $g_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$. 2. Das „schwache“ Produkt $\mathfrak{P} H_\lambda$ ist die Menge aller $h = \{h_\lambda\}$, die an nur endlich vielen Stellen von den jeweiligen Gruppeneinheiten e_λ aus H_λ verschiedene Komponenten aufweisen; die Verknüpfungsdefinition ist dieselbe wie unter 1. Für $\mathfrak{P} H_\lambda$ gibt es zwei mögliche Topologien: a) die „Quader“topologie, in der eine Umgebung $U = U(U_\lambda)$ durch ein für jedes λ definiertes System von Umgebungen $U_\lambda \subseteq G_\lambda$ festgelegt wird; zu U gehören alle und nur die $h = \{h_\lambda\}$ mit $h_\lambda \in U_\lambda$; b) die „Stern“topologie, in der die zu $U = U(U_\lambda)$ gehörigen $h = \{h_\lambda\}$ neben der unter a) genannten noch der weiteren Bedingung $\sum_\lambda (h_\lambda/U_\lambda) < 1$ unterworfen sind. Dabei bedeutet \sum_λ eine Summe mit eo ipso nur endlich vielen von Null verschiedenen Summanden (h_λ/U_λ) , die als untere Grenze derjenigen Potenzen 2^{-n} ($n = 0, 1, 2, \dots$) erklärt sind, für die $h_\lambda \in 2^{-n} U_\lambda$; hierbei ist $2^{-1} U_\lambda$ die offene Menge aller $u_\lambda \in U_\lambda$, für die auch noch $u_\lambda + u_\lambda \in U_\lambda$, und allgemein $2^{-n} U_\lambda = 2^{-1} (2^{-n+1} U_\lambda)$. Im Fall einer abzählbaren Menge von Indizes λ sind Quader- und Sterntopologie für $\mathfrak{P} H_\lambda$ äquivalent, im allgemeinen jedoch nicht. Führt man nun für $\prod G_\lambda$ die Tychonoffsche, für $\mathfrak{P} H_\lambda$ die Sterntopologie ein, so gilt, daß bei $g = \{g_\lambda\}$, $h = \{h_\lambda\}$, $gh = \sum_\lambda g_\lambda h_\lambda$ ($g_\lambda h_\lambda$ die Multiplikation zwischen G_λ und H_λ) von den beiden Produkten $\prod G_\lambda$ und $\mathfrak{P} H_\lambda$ jedes die Charaktergruppe des andern darstellt. Da unendliche Produkte $\prod G_\lambda$ aus lokalkompakten Gruppen G_λ nicht notwendig wieder lokalkompakt sein müssen, ist auch gezeigt, daß die Klasse der kommutativen topologischen Gruppen mit Pontrjaginscher Dualität eine echte Erweiterung der Menge der lokalkompakten darstellt. Grell (Berlin).

Gleason, A. M.: A note on locally compact groups. Bull. Amer. math. Soc. 55, 744—745 (1949).

L'A. montre le résultat suivant: tout groupe localement compact G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe localement compact unimodulaire homéomorphe à l'espace $G \times R$. La démonstration est basée sur le lemme suivant: si K est un sous-groupe distingué fermé de G tel que G/K soit unimodulaire, $x \rightarrow sxs^{-1}$ multiplie par $\varrho(s)$ la mesure de Haar sur K , $s \in G$ et $\varrho(s)$ étant défini par

$\int_G f(xs) dx = \varrho(s) \int_G f(x) dx$ (cf. A. Weil, *L'intégration dans les groupes*, Ch. 2, § 8, Paris 1940) (La condition „ K unimodulaire“ indiquée par l'A. est inutile; le lemme précité est cas particulier d'un résultat du réf. [J. Math. pur. appl. 27, 1—85, p.83 (1948)]).

Jean Braconnier (Lyon/France).

Borel, A. et J. de Siebenthal: Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos. *Comment. math. Helvetici* 23, 200—221 (1949).

Die Arbeit befaßt sich mit der Gruppentheorie im Großen. Untersucht werden jene zusammenhängenden, geschlossenen Untergruppen (sous-groupes fermés) einer Lieschen Gruppe (groupe clos) G , die denselben Rang haben wie diese. Untersuchungsmittel sind die „Diagramme“ oder, in anderer Ausdrucksweise, die Wurzelvektoren (vecteurs racines) von G . In Nr. 1 und 2 der Arbeit werden die Definitionen und wichtigsten Eigenschaften der Wurzelvektoren zusammengestellt, in Nr. 3 der entscheidende Satz (Theorem 2) bewiesen, daß die Wurzelvektoren einer Untergruppe von G auch Wurzelvektoren von G selbst sind. Dies trifft im allgemeinen Fall (verschiedener Rang von G und Untergruppe) nicht mehr bedingungslos zu. Es ergibt sich so ein Kriterium dafür, daß ein System von Wurzelvektoren von G einer geschlossenen Untergruppe entspreche. Das Theorem 3 in Nr. 4 liefert als zu erfüllende notwendige Bedingung eine obere Grenze für die Anzahl der Parameter einer Untergruppe gleichen Ranges, während in Nr. 5 eine notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt wird. Nach diesen Vorbereitungen erfolgt die explizite Bestimmung der größten Untergruppen einfacher Liescher Gruppen gleichen Ranges. Auf die Möglichkeit der Übertragung der Überlegungen von Nr. 4 auf den allgemeinen Fall wird hingewiesen.

Hardtwig (München).

Ritt, J. F.: Abel's theorem and a generalization of one-parameter groups. *Trans. Amer. math. Soc.* 67, 491—497 (1949).

Ausgehend vom Abelschen Theorem wird folgendes Problem untersucht: Es seien gegeben p symmetrische Funktionen $f_i(x_1, \dots, x_{p+1})$, die für $x_1 = \dots = x_{p+1} = 0$ analytisch sind. $P_i(u_1, \dots, u_p)$ sei die elementarsymmetrische Funktion vom Grad i der u_1, \dots, u_p . f_i reduziere sich für $x_j = 0$ zur Funktion P_i der übrigen x_k (für alle x_j). Durch die p Gleichungen (1) $P_i(y_1, \dots, y_p) = f_i(x_1, \dots, x_{p+1})$, $i = 1, \dots, p$, werden für kleine x kleine y bestimmt. Diese p y_i heißen das Produkt der x_1, \dots, x_{p+1} , in Formeln $y_1, \dots, y_p = \{x_1, \dots, x_{p+1}\}$. Das System (1) heißt assoziativ, wenn $\{\{x_1, \dots, x_{p+1}\}, x_{p+2}\} = \{x_1, \{x_2, \dots, x_{p+2}\}\}$ gilt. Es wird bewiesen, daß (1) dann und nur dann assoziativ ist, wenn es äquivalent ist einem (d. h. für kleine x dieselben y zu Lösungen hat wie ein) System $\sum_{j=1}^p \Phi_i(y_j) = \sum_{j=1}^{p+1} \Phi_i(x_j)$, wobei $\Phi_i(z)$ für $z = 0$ analytisch ist und seine Entwicklung um $z = 0$ mit dem Glied in z^i beginnt.

G. Köthe (Mainz).

Verbände. Ringe. Körper:

Rees, D.: The nuclei of non-associative division algebras. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 46, 1—18 (1950).

„Algebra“ bedeutet im folgenden eine Algebra über einem Körper F , für welche das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht zu gelten braucht. Nach A. A. Albert werden zwei Algebren A und A^0 als isotop bezeichnet, wenn es umkehrbare lineare Abbildungen α, β, γ des Vektorraumes A auf den Vektorraum A^0 mit $(xy)^\gamma = x^\alpha y^\beta$ ($x, y \in A$) gibt. Die assoziativen Algebren, welche bzw. aus den Elementen $y, x, z \in A$ mit $x(ab) = (xa)b$, $(ay)b = a(yb)$, $(ab)z = a(bz)$ für alle $a, b \in A$ bestehen, heißen linker, mittlerer und rechter Kern von A . Eine einfache assoziative Algebra B wird normal genannt, wenn das Zentrum C von B eine normale separable Erweiterung von F ist und jeder Automorphismus von $C|F$ sich zu einem Automorphismus von B fortsetzen läßt. Hat die Algebra A ein Einselement

und enthalten zwei oder alle drei Kerne von A Algebren, welche zu einer normalen Divisionsalgebra B isomorph sind, so gibt es eine zu A isotope Algebra, für welche der Durchschnitt der entsprechenden Kerne ebenfalls eine zu B isomorphe Algebra enthält. Für zentrale (d. h. Zentrum $= F$) Algebren A mit endlicher Basis, bei denen der Durchschnitt von a) zwei oder b) allen drei Kernen eine normale einfache Algebra B enthält, werden folgende Strukturaussagen gewonnen: 1. Ist B zentral, so gibt es im Falle a) eine Basis von A bezüglich B , deren Elemente mit jedem Element von B vertauschbar sind, und im Falle b) ist A das direkte Produkt von B mit der Algebra, welche aus den mit jedem Element von B vertauschbaren Elementen von A besteht; 2. Ist B ein Körper, so gibt es im Falle a) eine Basis u_1, \dots, u_t von A bezüglich B mit $u_i x = x^{\tau_i} u_i$ für $x \in B$, wobei die bis auf die Reihenfolge invariant bestimmten Automorphismen τ_i von $B|F$ die Galois-Gruppe von $B|F$ erzeugen; im Falle b) kommt jedes Element dieser Galois-Gruppe unter den τ_i gleich oft vor, und $u_i u_k$ ist Linearkombination solcher u_h mit $\tau_h = \tau_k \tau_i$. Mittels dieser Ergebnisse werden die möglichen Divisionsalgebren mit Einselement über dem Körper der reellen Zahlen bestimmt, bei denen mindestens zwei der Kerne nicht nur aus den reellen Vielfachen des Einselements bestehen: Eine solche Algebra ist entweder isomorph zum Körper der komplexen Zahlen oder aber vom Rang 4 und isotop zu der Algebra $A(\varphi)$ ($0 < \varphi < 2\pi$), welche aus den Paaren komplexer Zahlen mit der Multiplikation $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + b\bar{d}e^{i\varphi}, ad + bc)$ besteht. $A(\varphi)$ und $A(\psi)$ sind isomorph für $\varphi = \psi$ oder $\varphi + \psi = 2\pi$, und sonst nicht isotop.

Pickert (Tübingen).

Raffin, Raymond: Algèbres monosymétriques. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 31—33 (1950).

Es sei A eine nicht-assoziative Algebra über einem kommutativen Ring B mit Einselement 1. Der Rechtshauptgrad von A wird definiert als die kleinste Zahl d , für welche die ersten d Rechtshauptpotenzen von jedem $x \in A$, mit dem eventuell vorhandenen Einselement $e \in A$, linear abhängig über B sind. Verf. betrachtet Algebren mit endlichem Hauptgrad sowie Algebren vom zweiten Grade. Er beweist die Äquivalenz von Monosymmetrie (dies. Zbl. **33**, 348) und Nichtexistenz orthogonaler Elemente bei symmetrischen Algebren ($x \neq 0$, $y \neq 0$ heißen orthogonal, wenn $xy = yx = 0$) und gibt — unter gewissen Voraussetzungen — eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Monosymmetrie von A . Ferner wird bewiesen, daß die reellen, monosymmetrischen, Potenz-assoziativen (A. A. Albert, dies. Zbl. **33**, 154) Algebren von endlichem Grade vom zweiten Grade sind. Fuchs.

Raffin, Raymond: Algèbres du troisième degré. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 164—166 (1950).

Verf. betrachtet nicht-assoziative Algebren A (mit oder ohne Einselement e), die über einem kommutativen Ring B mit Einselement 1 eine endliche Basis besitzen. A ist vom dritten Rechtsgrade, wenn für jedes x in A eine Relation

$$x^2 x = \delta_x x^2 + \delta_{x,x} x + \delta_{x,x,e} e \quad [\delta \in B(\xi_i)]$$

gilt (das letzte Glied fehlt, wenn e nicht vorhanden ist). Einige Sätze über die Kommutativität und Assoziativität einer Subalgebra $[x]$ sowie über die Koinzidenz der Hauptgleichungen einer Algebra vom dritten Rechtsgrade werden bewiesen.

Fuchs (Budapest).

Crosby, W. J. R.: Generic algebras. Amer. J. Math. **69**, 333—347 (1947).

Über einem Körper Z sei A eine zentrale einfache Algebra (als Repräsentant ihrer Klasse betrachtet) und K ein normaler Zerfällungskörper mit der Gruppe \mathcal{G} , von dem vorausgesetzt sei, daß die Faktorensystemklasse c aus der verschränkten Produktdarstellung $A \sim (c, K)$ im Grundkörper Z repräsentierbar ist. Verf. definiert eine dieser Sachlage entsprechende allgemeine zentrale einfache Algebra (A/Z) (wieder als Repräsentant ihrer Klasse betrachtet) mit normalem Zerfällungskörper K/Z der Gruppe \mathcal{G}

folgendermaßen. Es sei Γ eine (einstufig) isomorphe Darstellung von \mathfrak{G} durch lineare Substitutionen von q Unbestimmten $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_q)$ und Z der Invariantenkörper bei Γ von $K = Z(\mathfrak{x})$, so daß in der Tat K/Z normal mit der Gruppe \mathfrak{G} ist. Dann wird durch $A \sim (c, K)$ eine zentrale einfache Algebrenklasse über Z definiert. Verf. untersucht im einzelnen den Prozeß der Spezialisierung der Unbestimmten \mathfrak{x} auf Elemente $a = (a_1, \dots, a_q)$ aus Z in seiner Auswirkung auf die betrachtete Algebrenklasse. Dabei ergibt sich, daß Exponent e und Index m von A Teiler von Exponent ε bzw. Index μ von A sind, und daß einem normalen oder speziell zyklischen Zerfällungskörper Λ von A mit der Gruppe \mathfrak{G} ein normal bzw. speziell zyklischer Zerfällungskörper L von A mit einer Untergruppe von \mathfrak{G} entspricht. Er betrachtet weiter den Fall, daß der zugrunde gelegte Zerfällungskörper K regulär im R. Brauerschen Sinne ist, d. h. daß die Faktorensystemklasse c durch Einheitswurzeln repräsentierbar ist. Die gemachte Voraussetzung, daß c in Z repräsentierbar ist, ist hierbei sicher erfüllt, wenn Z die Gruppe \mathfrak{N} der n -ten Einheitswurzeln enthält, wo n ein Multiplum des Exponenten e von A ist. Im Anschluß an eine Arbeit von R. Brauer [Math. Ann., Berlin **110**, 473—500 (1934); dies. Zbl. **10**, 245] charakterisiert er bei dieser Sachlage den Exponenten ε von A durch die R. Brauersche Erweiterung \mathfrak{G} von \mathfrak{N} mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}$ zur Faktorensystemklasse c . Wird speziell der reguläre Zerfällungskörper K nach dem R. Brauerschen Schema, ausgehend von einem Zerfällungskörper vom Minimalgrade m , konstruiert, so erweist sich $\mu = m$. Ist dann die zu A ähnliche Divisionsalgebra Δ ein verschränktes Produkt bzw. zyklisch erzeugbar bzw. direkt zerlegbar, so gilt das Entsprechende für die zu A ähnliche Divisionsalgebra D . Verf. hält es für möglich, daß durch diese Zurückführung auf seine allgemeinen Algebren die bisher unentschiedene Frage zugänglich wird, ob es zentrale Divisionsalgebren gibt, die keine verschränkten Produkte sind.

Hasse (Berlin).

Ma'cev, A. I.: Über die Einbettung von Gruppenalgebren in Divisionsalgebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 1499—1501 (1948) [Russisch].

Verf. beweist, daß sich die Gruppen-Algebra einer beliebigen geordneten Gruppe G über einem beliebigen Körper K immer in eine Divisions-Algebra einbetten läßt. Wenn der Körper K ebenfalls geordnet ist, so läßt sich die Divisions-Algebra so wählen, daß die Ordnung von G und von K erhalten bleibt. Der Beweis stützt sich auf die Methode der formalen Potenz-Reihen und geht im wesentlichen auf H. Hahn zurück [S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa **116**, 601—655 (1907)]. Weitere einschlägige Literatur: R. Moufang [J. reine angew. Math. **176**, 203—223 (1937); dies. Zbl. **15**, 342], H. Shimbireva (dies. Zbl. **29**, 103) und vor allem die sehr ausführliche Darstellung von B. H. Neumann „On ordered division rings“, [Trans. Amer. math. Soc. **66**, 202—252 (1949)], die der Arbeit des Verf. zeitlich einige Wochen vorangeht.

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Fuchs, Ladislav: The extension of the notion „relatively prime“. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. **13**, 43—47 (1949).

Indem er wie üblich das Radikal \mathfrak{r} eines Ideals \mathfrak{a} aus dem beliebigen kommutativen Ringe \mathfrak{R} gleich dem Durchschnitt aller minimalen Primoberideale von \mathfrak{a} setzt, nennt Verf. das Element b zu \mathfrak{a} „relativ primär“, wenn aus $b \cdot c \in \mathfrak{a}$ stets $c \in \mathfrak{r}$ folgt; andererseits bezeichnet er b als „fast prim“ zu \mathfrak{a} , wenn b zu \mathfrak{r} prim ist, wenn also $b \cdot c \in \mathfrak{r}$ stets $c \in \mathfrak{r}$ nach sich zieht. Er stellt fest, daß b dann und nur dann zu \mathfrak{a} fast prim ist, wenn jede Potenz von b zu \mathfrak{a} relativ primär ist, und zeigt, daß bei einem Ideal \mathfrak{a} , das mit dem Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten zusammenfällt, alle zu \mathfrak{a} fast primen Elemente sogar zu \mathfrak{a} prim sind. — Im zweiten Teil der Note benutzt Verf. unter einschränkenden Voraussetzungen über den betrachteten Ring (Existenz nur endlich vieler isolierter Primärkomponenten bei jedem Ringideal bzw. Maximalbedingung) seine Begriffsbildungen zur Charakteri-

sierung von Primärideal und Quasiprimärideal (d. h. Ideal mit Primideal als Radikal). *Krull* (Bonn).

Szele, Tibor: Zur Theorie der Zeroringe. *Math. Ann.*, Berlin **121**, 242—246 (1949).

Jede abelsche Gruppe A ist Additionsgruppe eines Ringes, nämlich des Ringes, in dem das Produkt von irgend zwei Elementen 0 ist. Ist dies der einzige Ring, dessen Additionsgruppe A ist, so nennt Verf. A eine Nilgruppe. Verf. zeigt dann: 1. Nilgruppen bestehen entweder nur aus Elementen endlicher Ordnung oder enthalten keine Elemente endlicher Ordnung außer 0. 2. Die Gruppe A , deren sämtliche Elemente endliche Ordnung haben, ist dann und nur dann eine Nilgruppe, wenn $A = nA$ für jedes positive n . *Reinhold Baer* (Urbana, Illinois).

Pickert, G.: Inseparable Körpererweiterungen. *Math. Z.* **52**, 81—136 (1949).

In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. eine vollständige Strukturtheorie der inseparablen endlichen und unendlichen Körpererweiterungen. Die der Galoisschen Theorie nachgebildete Jacobsonsche Theorie von inseparablen Erweiterungen [*Trans. Amer. math. Soc.* **42**, 206—224 (1937); dies. *Zbl.* **17**, 292] ist auf Erweiterungen vom Exponenten 1 beschränkt, und außerdem ist die Struktur der dort auftretenden Lieschen Algebren noch schwieriger zu überblicken als die inseparablen Erweiterungen selbst. Die Untersuchungsmethode des Verf. besteht darin, daß er gewisse Strukturinvarianten, die als Werte natürliche Zahlen bzw. Mächtigkeiten annehmen, den inseparablen Erweiterungen zuordnet. Hier können nur einige von den 59 Sätzen der umfangreichen Arbeit besprochen werden. — In der endlichen Erweiterungstheorie stellt Verf. erstens die Grundlagen der Theorie zusammen, von welchen die folgenden, in der Arbeit grundlegenden Begriffe erwähnt seien: eine algebraische Erweiterung L/K heißt rein-inseparabel (r. i.), wenn jedes bez. K separable Element von L bereits zu K gehört (K bezeichnet einen Körper der Primzahlcharakteristik p); ein Element a in K heißt p -abhängig von einer Menge $M \subset K$, wenn $a \in K^p(M)$ ist; der Unvollkommenheitsgrad von K [$\text{Uvg}(K)$] ist die gemeinsame Mächtigkeit der Mengen B , für die $K = K^p(B)$ gilt. Einige Sätze werden mittels dieser Begriffe bewiesen, wie z. B. die bei endlichem $\text{Uvg}(K)$ bereits bekannte Tatsache, daß $\text{Uvg}(L) = \text{Uvg}(K)$ für endliche L/K ist. Es wird eine Normalform $K(a_1, \dots, a_m)$ für endliche r. i. Erweiterungen behandelt; diese ist dadurch charakterisiert, daß a_i unter den a_1, \dots, a_m den größten Exponenten $e_i \neq 0$ bez. $K(a_1, \dots, a_{i-1})$ besitzt (m ist die Vielfachheit der Erweiterung). Die e_i sind Strukturinvarianten. Wichtig sind z. B. die Ergebnisse über die Vielfachheiten der Erweiterungen L/K , L/M , M/K mit $K \subset M \subset L$; es wird bewiesen, daß kein Zwischenkörper M eine größere Vielfachheit hat als L selbst. Der zweite Abschnitt behandelt einfache rein-transzendente Erweiterungen. Verf. beweist u. a., daß die Vielfachheit eines Funktionenkörpers über unvollkommenem K nicht größer als $\text{Uvg}(K)$ sein kann. Im dritten Abschnitt werden die unendlichen r. i. Erweiterungen L/K untersucht. Hier werden zwei Typen unterschieden: der eine, die rein-unendliche Erweiterung $K_{(M)}$, entsteht aus K durch Adjunktion sämtlicher p^n -ter Wurzeln ($n = 1, 2, \dots$) aus den Elementen einer gewissen Menge $M \subset K - K^p$; der andere, die halbendliche Erweiterung, hat die Eigenschaft, daß für jedes $a \in K - K^p$ ein n mit $a^{p^n} \in L - L^p$ existiert. Die Untersuchung unendlicher Erweiterungen stützt sich auf die der μ -Abhängigkeit und dem Uvg entsprechenden Begriffe der U -Abhängigkeit ($a \in K - K^p$ heißt U -abhängig von $M \subset K - K^p$, wenn, für eine endliche Untermenge N von M , $K_{(a)} \subset K_{(N)}$ gilt) und des U -Grades von L/K , der als die kleinste Mächtigkeit definiert ist, die eine Menge M mit $L = K_{(M)}$ besitzen kann. Ein wichtiges Ergebnis ist Satz 52: jede r. i. Erweiterung läßt sich auf eine und nur eine Weise als halbendliche Erweiterung einer rein-unendlichen Erweiterung darstellen. *Fuchs* (Budapest).

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Pall, Gordon: Composition of binary quadratic forms. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 1171—1175 (1948).

Die Theorie der Komposition der binären quadratischen Formen mit gleichen Diskriminanten und zueinander primen Teilern hat von Gauß nach der allgemeinen noch eine spezielle Behandlung erfahren in den Artikeln 242 und 243 der *Disquisitiones arithmeticae*. Darauf gehen die Versuche zurück oder können wenigstens darauf zurückgeführt werden, welche zur Ausschaltung der bilinearen Substitution unternommen wurden. Verf. skizziert hier eine neue in dieser Richtung liegende Darstellung der Theorie, welche sich zwar an die von Dirichlet [*Werke* II, 105—114

(1897)] gegebene anlehnt, aber unter Benutzung einiger Hilfssätze über Matrizen die bilineare Substitution noch weitgehender auszuschalten sucht. *Brandt*.

Jones, B. W.: The composition of quadratic binary forms. *Amer. math. Monthly* **56**, 380—391 (1949).

Verf. gibt eine elementare Darstellung des bekannten Zusammenhanges zwischen der Idealtheorie eines quadratischen Zahlkörpers und der Komposition der binären quadratischen Formen mit dem Ziel, dabei auch die Gaußschen Sätze aus der Komposition der Formenklassen vollständig zur Darstellung zu bringen, was nach der Meinung des Verf. bisher nur unvollständig geschehen ist. *Brandt* (Halle).

Humbert, Pierre: Réduction de formes quadratiques dans un corps algébrique fini. *Comment. math. Helvetici* **23**, 50—63 (1949).

Die Untersuchungen der Paragraphen 1—5 der Siegelschen Abhandlung über Einheiten quadratischer Formen werden im Vorliegenden verallgemeinert [C. L. Siegel, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* **13**, 209—239 (1942); dies. *Zbl.* **23**, 7]. An Stelle der indefiniten quadratischen Formen mit ganz-rationaler Koeffizienten-Matrix werden nicht-ausgeartete indefinite quadratische Formen $S[x]$ betrachtet, deren Koeffizienten-Matrix S aus ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers \mathfrak{K} endlichen Grades besteht. Die Resultate des Verf. sind: 1. Die Anzahl der Klassen von $S[x]$ zu gegebener Norm der Determinante und gegebener Variablenzahl ist endlich, 2. Die Einheitengruppe von $S[x]$ hat endlich viele Erzeugende. Zum Beweis verwendet Verf. die von ihm früher entwickelte Reduktionstheorie der definiten quadratischen Formen aus \mathfrak{K} [*Comment. math. Helvetici* **12**, 263—306 (1939/40); dies. *Zbl.* **23**, 199], die eine Verallgemeinerung der Minkowskischen Reduktionstheorie ist. — Ist \mathfrak{K} imaginär und mit dem konjugiert-komplexen Körper identisch, dann interessiert man sich auch für indefinite hermitesche Formen $H[x]$. Falls die konjugierten Matrizen zu der hermiteschen Matrix H alle hermitesch sind, beweist Verf. 1. und 2. auch für $H[x]$ an Stelle $S[x]$. — Die vorliegenden Ergebnisse sind von grundlegender Bedeutung für die Theorie der indefiniten quadratischen und hermiteschen Formen aus \mathfrak{K} . *Hel Braun* (Göttingen).

Blij, F. van der: On the theory of quadratic forms. *Ann. Math.*, Princeton, **II**, **S. 50**, 875—883 (1949).

$S^{(m)}$ und $T^{(n)}$ seien symmetrische Matrizen mit ganzrationalen Elementen, so daß die zugehörigen quadratischen Formen in m bzw. n Variablen ($m \geq n$) positiv-definit sind. P sei eine feste Matrix von m Zeilen und n Spalten, die primitiv ist bezüglich eines festen natürlichen Moduls μ . Man interessiert sich für die Anzahl $A(S, T; P, \mu)$ der ganz-rationalen Lösungen X der Gleichung $X' S X = T$, die der Bedingung $X \equiv P \pmod{\mu}$ genügen. Dabei bedeutet X' die Transponierte zu X . — Es wird S_1 als zur Hauptklasse von S gehörig bezeichnet, wenn für unimodulares U besteht $U' S U = S_1$ und $U \equiv E \pmod{\mu}$. Dabei bedeutet E die Einheitsmatrix. Man bezeichnet S_1 als zur Hauptklasse von $S \bmod q$ gehörig, wenn für den natürlichen Modul q und $\bmod q$ unimodulares U die Kongruenz $U' S U \equiv S_1 \pmod{q}$ gilt, wobei $U \equiv E \pmod{\mu}$ ist. Wenn S_1 positiv-definit ist und S_1 für jedes natürliche q zur Hauptklasse von $S \bmod q$ gehört, dann bezeichnet man S_1 als zum Hauptgeschlecht von S gehörig. Die Anzahl der $\bmod q$ inkongruenten Lösungen X von $X' S X \equiv T \pmod{q}$, die der Bedingung $X \equiv P \pmod{\mu}$ genügen, sei mit $A_q(S, T; P, \mu)$ bezeichnet. Man setzt $M(S, T; P, \mu) = \sum A(S_k, T; P, \mu) / A(S_k, S_k; E, \mu)$ und $M(S, \mu) = \sum 1 / A(S_k, S_k; E, \mu)$, wobei die Summe jeweils über ein volles System S_k von Repräsentanten der Hauptklassen des Hauptgeschlechtes von S erstreckt wird. Wenn q die Folge $1!, 2!, 3!, \dots$ durchläuft, so beweist Verf. für $m > n$

$$(*) \quad M(S, T; P, \mu) / M(S, \mu) = \varrho \lim_{q \rightarrow \infty} A_q(S, T; P, \mu) / q^{mn - \frac{1}{2}n(n+1)}.$$

Dabei ist ϱ ein nur von m, n und den Determinanten von S und T abhängiger Zahlfaktor. Im Fall $m = n$ wird vom Verf. eine (*) entsprechende Formel bewiesen.

— Für $\mu = 1$, $m > n$ ist (*) gleichbedeutend mit dem Siegelschen Satz über die Darstellungsanzahlen quadratischer Formen [L. C. Siegel, Ann. Math., Princeton, II. S. 36, 527—606 (1935); dies. Zbl. 12, 197]. Verf. beweist (*) unter Anwendung der Siegelschen Methoden. Ferner leitet Verf. im Fall $n = 1$ das Analogon zur analytischen Formulierung des Siegelschen Satzes aus (*) ab. *Hel Braun.*

Châtelet, François: Relations entre l'arithmétique et la géométrie sur une quadrique. Bull. Soc. math. France 76, 108—113 (1948).

Die Probleme der rationalzahligen Äquivalenz quaternärer quadratischer Formen und der Darstellbarkeit der Null werden in geometrischer Sprechweise erläutert, indem die beiden Scharen gerader Linien auf den Flächen zweiter Ordnung herangezogen werden. *Siegel (Princeton).*

Steuerwald, Rudolf: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn J. Heinhold. Math. Z., Berlin 52, 394—400 (1949).

Verf. zeigt, wie man die Resultate über binäre quadratische Formen von J. Heinhold in der Math. Z., Berlin 44, 659—688 (1939); dies. Zbl. 20, 6 vervollständigen kann. Daraus folgt: Ist q eine natürliche Zahl > 3 und $D = 4q^2 + 1$ quadratfrei, so existiert in dem quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{D})$ kein Euklidischer Algorithmus. *Nagell (Uppsala).*

Weissinger, Johannes: Zur arithmetischen Theorie separierbarer Funktionenkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16_{3/4}, 155—163 (1949).

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen mit dem beliebigen Konstantenkörper k . Besitzt K eine separable Erzeugung, d. h. existiert ein Element x so, daß $K = k(x, y)$ über $k(x)$ und $k(y)$ separabel ist, so kann man in gewohnter Weise den Differentialquotienten dx/dy bilden. Im 1. Teil wird gezeigt, daß $dx/dy = \mathfrak{B}_x \mathfrak{N}_y^2 / \mathfrak{B}_y \mathfrak{N}_x^2$ gilt, wo $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y$ die Verzweigungsdivisoren von $K/k(x)$, $K/k(y)$ und $\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y$ die Nennerdivisoren von x, y sind. Im 2. Teil wird eine rein inseparable Erweiterung k'/k (Wurzelerweiterung) vorgenommen und gezeigt, daß bei der entsprechenden Erweiterung $K/k \rightarrow K'/k' = K k'/k'$ die Klasseneinteilung und die Grade der Divisoren invariant bleiben. Dagegen gilt für die Verzweigungsdivisoren \mathfrak{B}_x bzw. \mathfrak{B}'_x von $K/k(x)$ bzw. $K'/k'(x)$: $\mathfrak{B}_x/\mathfrak{B}'_x$ ist ein i. a. von 1 verschiedener Divisor, welcher sinngemäß als der Führer von K' bzgl. K definiert werden kann. *Eichler (Münster).*

Zahlentheorie:

Moessner, Alfred: Einige diophantische Aufgaben. Euclides, Madrid 9, 423—426 (1949) [Spanisch].

Novikov, A. P.: Eine neue Lösung der diophantischen Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 205—206 (1948) [Russisch].

Verf. gibt einen kurzen Beweis für die folgende Behauptung: Sei $1, \beta, \gamma$ eine Lösung der diophantischen Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Die allgemeine Lösung ist dann $\pm x = t_1 + t_2$, $\pm y = \beta(t_1 - t_2) - 2\gamma ct_3$ und $\pm z = \gamma(t_1 - t_2) + 2\gamma bt_3$, wo t_1, t_2 und t_3 die Bedingung $t_1 t_2 = t_3^2 bc$ befriedigende ganze Zahlen sind. *Gál.*

Klee jr., V. L.: A note on Fermat's congruence. Amer. math. Monthly 56, 626—628 (1949).

Die zahlentheoretische Funktion $\lambda(x)$ werde erklärt durch $\lambda(2^e) = \varphi(2^e)$ für $e = 0, 1, 2$; $\lambda(2^e) = \frac{1}{2} \varphi(2^e)$ für $e \geq 3$, $\lambda(p^e) = \varphi(p^e)$ für Primzahlen $p > 2$ und $\lambda(2^e p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}) = \text{kl. g. V. } \{\lambda(2^e), \lambda(p_1^{e_1}), \dots, \lambda(p_n^{e_n})\}$. Die Kongruenz $a^{\lambda(m)} \equiv 1(m)$ besitzt bekanntlich Lösungen, die zum Exponenten $\lambda(m)$ gehören, und überdies gilt diese Kongruenz für alle zu m relativ primen a . Bezeichnet man mit $L(m)$ die Menge aller ganzen k , für die $a^k \equiv 1(m)$ für alle zu m relativ primen a , so läßt sich obiger Sachverhalt dahin formulieren, daß $L(m)$ aus allen Vielfachen von $\lambda(m)$ besteht.

Verf. stellt sich demgegenüber die Frage, bei festem Exponenten n alle Moduln h zu bestimmen, für die $a^n \equiv 1(h)$, $(a, h) = 1$, gilt, und bezeichnet die Menge aller dieser h mit $C(n)$. Aus der Tatsache, daß $\lambda(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) gilt, folgt unschwer, daß $C(n)$ beschränkt ist. Ist $g(n)$ das Maximum von $C(n)$, so beweist Verf. leicht, daß $C(n)$ aus allen Teilern von $g(n)$ besteht. Anschließend werden noch einige einfache Folgerungen gezogen. *Ostmann* (Marburg/Lahn).

Wayne, Alan: Fermat's equation and Tshebysheff's polynomials. Amer. math. Monthly **56**, 626 (1949).

$a > 0$ sei keine rationale Quadratzahl. v_n/w_n ($n = 1, 2, \dots$) seien die n -ten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{a} . Bekanntlich werden alle ganzzahligen Lösungen der Fermat-Pellschen Gleichung $v^2 - a w^2 = 1$ von allen Paaren (v_{nk-1}, w_{nk-1}) , $n = 0, 1, 2, \dots$; k = Gliederzahl der primitiven Periode des Kettenbruchs, geliefert. Aus $v_{nk-1} + w_{nk-1} \sqrt{a} = \pm (v_{k-1} + w_{k-1} \sqrt{a})^n$ erhält Verf. mit $v_{k-1} = \cos \vartheta$ und $\sqrt{a} w_{k-1} = -i \sin \vartheta$ die Lösungen in der Gestalt $v_{nk-1} = \pm T_n(v_{k-1})$, $w_{nk-1} = \pm w_{k-1} U_{n-1}(v_{k-1})$, worin $T_n(\cos x) = \cos nx$ und $U_n(\cos x) = \sin(n+1)x/\sin x$ die Tschebyscheffschen Polynome bedeuten. *Ostmann* (Marburg/Lahn).

Peck, L. G.: Diophantine equations in algebraic number fields. Amer. J. Math. **71**, 387—402 (1949).

Die vom Ref. [Amer. J. Math. **66**, 122 (1944); Ann. Math., Princeton, II. S. **46**, 313 (1945)] auf algebraische Zahlkörper verallgemeinerte Hardy-Littlewoodsche Kreismethode wird zum Beweis des folgenden Satzes benutzt: Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ Zahlen eines totalkomplexen algebraischen Zahlkörpers k vom Grade n , ferner m eine natürliche Zahl; ist dann $q > \text{Max} \{4m^{2n+3}, (2^{m-1} + n)m n\}$, so hat die Gleichung $\alpha_1 \xi_1^m + \dots + \alpha_q \xi_q^m = 0$ eine nicht-triviale Lösung in k . Unter Benutzung eines Resultates von R. Brauer [Bull. Amer. math. Soc. **51**, 749 (1945)] ergibt sich hieraus allgemeiner, daß sogar jedes System von homogenen algebraischen Gleichungen $f_1(\xi_1, \dots, \xi_q) = 0, \dots, f_n(\xi_1, \dots, \xi_q) = 0$ der Grade m_1, \dots, m_h mit Koeffizienten aus k eine r -dimensionale lineare Schar von Lösungen ξ_1, \dots, ξ_q in k hat, sobald q eine nur von n, r und m_1, \dots, m_h abhängige Schranke übersteigt. *Siegel*.

Estermann, T.: On Dirichlet's L functions. J. London math. Soc. **23**, 275—279 (1949).

Es sei $L(s, \chi)$ die Dirichletsche L -Funktion für einen primitiven Charakter χ modulo k . Die für jedes positive ε geltende Abschätzung (1) $1/L(1, \chi) = O(k^\varepsilon)$ war zuerst vom Ref. [Acta arith., Warszawa **1**, 83—86 (1935); dies. Zbl. **11**, 9] bewiesen worden, unter Benutzung der Heekeschen Integraldarstellung der Dedekindschen Zetafunktion. Verf. gibt einen sehr einfachen neuen Beweis für (1), der nur durchaus elementare Eigenschaften der Funktionen $L(s, \chi)$ in der rechten Halbebene und klassische Sätze der Funktionentheorie heranzieht. *Siegel* (Princeton).

Basoco, M. A.: On certain arithmetical functions due to M. Georges Humbert. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. **26**, 237—250 (1948).

Es seien $\vartheta_\lambda(z)$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) die zu den Perioden $\pi, \pi\tau$ gehörigen Jacobischen Thetafunktionen, insbesondere

$$\vartheta_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2in z}, \quad q = e^{\pi i \tau}.$$

Die beiden Funktionalgleichungen

$$h(z + \pi) = -h(z), \quad h(z + \pi\tau) = h(z) + 2iq^{\frac{1}{4}} e^{iz} \vartheta_3(z)$$

besitzen genau eine ganze transzendente Lösung, nämlich

$$h(z) = 4 \sum_{m=1,3,\dots} \frac{q^{m^2/4+m}}{1-q^m} \sin m z;$$

und in ähnlicher Weise lassen sich 15 weitere Funktionen erklären. Benutzt man die

Fourierschen Reihen der Thetaquotienten $\vartheta_1^2 \frac{\vartheta_\alpha(x+y)}{\vartheta_\beta^2(x) \vartheta_\gamma(y)}$, so lassen sich durch Koeffizientenvergleich arithmetische Summenformeln ableiten, welche insbesondere den Satz enthalten: Die Anzahl der Zerlegungen einer natürlichen Zahl $n \equiv 3 \pmod{4}$ in 5 Quadrate ist gleich $20 \sum_{4l^2 < n} \sigma(n - 4l^2)$, wo $\sigma(x)$ die Summe der Teiler von x bedeutet. Hierzu ist zu bemerken, daß der Satz eine leichte Folgerung aus dem Jacobischen Satz über die Zerlegung in 4 Quadrate ist. Siegel (Princeton).

Kruyswijk, D.: On some well-known properties of the partition function $p(n)$ and Euler's infinite product. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. 23, 97—107 (1950).
Verf. gibt Beweise für die Ramanujanschen Identitäten:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5m+4) x^m = 5 \prod_{h=1}^{\infty} (1-x^{5h})^5 (1-x^h)^{-6},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(7m+5) x^m = 7 \prod_{h=1}^{\infty} (1-x^{7h})^3 (1-x^h)^{-4} + 49 x \prod_{h=1}^{\infty} (1-x^{7h})^7 (1-x^h)^{-8}$$

und

$$(1) \quad A^5 C + 5 A^4 C^2 + 15 A^3 C^3 + 25 A^2 C^4 + 25 A C^5 - B^6 = 0,$$

$$(2) \quad A^7 C + 7 A^6 C^2 + 21 A^5 C^3 + 49 A^4 C^4 + 7 A^3 B^4 C + 147 A^3 C^5 \\ + 35 A^2 B^4 C^2 + 343 A^2 C^6 + 49 A B^4 C^3 + 343 A C^7 - B^8 = 0,$$

wo $A = a(x) = x \prod_{h=1}^{\infty} (1-x^{24h})$, $B = a(x^q)$, $C = a(x^{q^2})$,

während q in (1) den Wert 5 und in (2) den Wert 7 hat. Wesentlich ist dabei, daß die Beweise völlig elementar sind und, im Gegensatz zu früheren Beweisen, keinerlei funktionentheoretische Hilfsmittel benutzen. Kloosterman (Leiden).

Selberg, Sigmund: Eine Übersicht über einige neuere Resultate in der additiven Zahlentheorie. Mat. Tidsskr. A, København 1949, 1—15 (1949) [Norwegisch].

Es sei a_1, a_2, a_3, \dots eine monoton wachsende unendliche Folge A natürlicher Zahlen und $A(x)$ die Anzahl der $a_n \leq x$. Die Dichte und die asymptotische Dichte sind als größte untere Schranke und unterer Limes der Folge $A(n)/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) erklärt. Es sei B eine zweite Folge b_1, b_2, b_3, \dots und $A + B$ die Folge, gebildet aus allen $a_k, b_l, a_k + b_l$. Im Laufe der letzten 20 Jahre sind verschiedene wichtige Resultate über die Beziehungen der Dichten und asymptotischen Dichten von A, B und $A + B$ gewonnen worden, insbesondere durch Schnirelmann, Khintchine, Erdős und Mann, worüber ein gut lesbarer Bericht gegeben wird. Siegel.

Erdős, P.: On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 374—384 (1949).

Verf. beschreibt seinen Anteil an den Untersuchungen, die zum ersten elementaren Beweis des Primzahlsatzes geführt haben. Unter Benutzung der von Atle Selberg entdeckten grundlegenden Formel

$$(1) \quad \sum_{p < x} (\log p)^2 + \sum_{p < q < x} \log p \log q = 2x \log x + O(x),$$

in welcher über Primzahlen p und q summiert wird, gelingt Verf. zum erstenmal auf elementarem Wege der Nachweis, daß für jedes feste positive δ und $x \rightarrow \infty$ die Beziehung (2) $x = O(\sum_{x < p < x + \delta x} \log p)$ gilt, aus der insbesondere folgt, daß der Quotient

konsekutiver Glieder der Primzahlfolge gegen 1 strebt. Der im Text gegebene Beweis von (2) ist in der Idee korrekt, wird aber durch verschiedene Ungenauigkeiten und Lücken beeinträchtigt, welche das Verständnis erschweren. Es wird dann ausgeführt, wie A. Selberg aus (1) und (2) durch weitere elementare Schlüsse den Primzahlsatz abgeleitet hat (in der späteren Veröffentlichung von A. Selberg [Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 305—313 (1949)] ist die Benutzung von (2) überflüssig geworden), und es werden einige Vereinfachungen angegeben. Siegel.

Erdős, P.: On a tauberian theorem connected with the new proof of the prime number theorem. J. Indian math. Soc., n. S. **13**, 131—144 (1949).

Es wird folgender Satz bewiesen: Ist a_1, a_2, \dots eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, $s_n = a_1 + \dots + a_n$ und gilt

$$\sum_{k=1}^n a_k (k + s_{n-k}) = n^2 + O(n),$$

so ist (1) $s_n = n + O(1)$. Zunächst leitet Verf. die schwächere Aussage $s_n = n + O(\log n)$ her, auf dem Wege über die noch ungünstigeren Fehlerglieder $o(n)$ und $O(n^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Der Beweis von (1) selber folgt durch Heranziehung von Sätzen über Dichtigkeiten von Folgen natürlicher Zahlen, die an und für sich von Interesse sind. Das Verständnis wird durch zahlreiche Druckfehler erschwert. Der Satz ist von axiomatischer Bedeutung für den elementaren Beweis des Primzahlsatzes. Siegel.

Erdős, P.: Supplementary note. J. Indian math. Soc., n. S. **13**, 145—147 (1949).

Es mögen a_k und s_n dieselbe Bedeutung haben wie im vorhergehenden Referat.

Es wird bewiesen, daß die Voraussetzungen $\sum_{k=1}^n k a_k = \frac{1}{2} n^2 + O(n)$ oder

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-k} = \frac{1}{2} n^2 + O(n)$$

die Folgerungen $s_n - n + O(\log n)$ oder $s_n = n + o(n)$ nach sich ziehen und daß die Fehlerglieder hierbei nicht zu $o(\log n)$ oder $o(\sqrt{n})$ verschärft werden können. Siegel (Princeton).

Specht, Wilhelm: Zahlenfolgen mit endlich vielen Primteilern. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1948**, 149—169 (1949)

Es sei $1 = b_1 < b_2 < \dots$ die Folge aller derjenigen natürlichen Zahlen, deren sämtliche Primteiler einer gegebenen Menge von $m (> 1)$ Primzahlen p_1, \dots, p_m angehören;

man setze $P = \prod_{k=1}^m p_k^{1/2}$, $Q = \prod_{k=1}^m (k \log p_k)^{1/m}$. Durch Pólya [Math. Z., Berlin **1**, 143—148 (1918)] waren die Beziehungen $\log b_n \sim Q n^{1/m}$, $b_{n+1} \sim b_n$, $b_{n+1} - b_n \rightarrow \infty$ bewiesen worden. Verf. beweist die Verschärfungen $b_n \sim P^{-1} \exp(Q n^{1/m})$, $\log(b_{n+1} - b_n) \sim \log b_n$, wobei das Weylsche Kriterium für Gleichverteilung von Zahlen modulo 1 und eine vom Ref. gegebene Verfeinerung des Ingheschen Satzes herangezogen werden. Siegel (Princeton).

Anfert'eva, E. A.: Über die Transformationsformeln von Vinogradov-van der Corput. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 541—544 (1948) [Russisch].

The author applies Mellin's integral formula and the functional equation of $\zeta(s)$ to the infinite series

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^m/N} e^{-2\pi i \alpha n^m}$$

where $m \geq 2$ and N are positive integers and $x = (1/N + 2\pi i \alpha)^{1/m}$. He shows that

$$S(x) = A_0 |\alpha|^{-1/2(m-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2-1/2(m-1)}} \exp\left(-\frac{n^{m/(m-1)}}{|\alpha|^{1/(m-1)} 2\pi N \alpha (m-1)} + i \frac{n^{m/(m-1)}}{|\alpha|^{1/(m-1)}}\right) + O(\log^2 |\alpha| N)$$

where A_0 is a certain constant and $2\pi |\alpha| N > 1$. He discusses similar formulae.

K. Mahler (Manchester).

Rényi, Alfréd: On the measure of equidistribution of point sets. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. **13**, 77—92 (1949).

Es sei $|E|$ das Maß und $F(x)$ die charakteristische Funktion der im Intervall $(0, 1)$ liegenden meßbaren Punktmenge E . Die Funktion $F(x)$ werde außerhalb des Intervalls $(0, 1)$ periodisch fortgesetzt mit der Periode 1. Sei E_t die Menge mit der charakteristischen Funktion $F(x+t)$ und $G(t)$ das Maß des Durchschnitts von E und E_t . Verf. definiert das Gleichverteilungsmaß $\mu(E)$ von E durch die Formel

$\mu(E) = |E|^{-2} m(E)$, wo $m(E)$ das Minimum der (stetigen) Funktion $G(t)$ ist. Für $0 < |E| < 1$ ist dann $0 \leq \mu(E) < 1$. Verf. beweist, daß für jedes α mit $0 < \alpha \leq 1$ die obere Grenze von $\mu(E)$, wenn E sämtliche meßbare Mengen mit $|E| = \alpha$ durchläuft, gleich 1 ist. Zur Konstruktion von Mengen E mit wenig von 1 verschiedenem $\mu(E)$ werden sogenannte „Differenzen-Basen modulo q von der Ordnung k “ benutzt, d. h. endliche Mengen von ganzen Zahlen a_0, a_1, \dots, a_p derart, daß die Differenzen $a_i - a_j$ ($i \neq j$) jede Restklasse $\neq 0$ modulo q genau k -mal darstellen. Im Falle $q = P^2 + P + 1$, $P = p^m$, p prim, wurden solche Basen für $k = 1$ konstruiert von Singer [Trans. Amer. math. Soc. 43, 377—385 (1938); dies. Zbl. 19, 5]. Verf. beweist: Falls $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_p < q$ eine solche Basis ist und falls $1 \leq A_1 < A_2 < \dots < A_k$ [wo $k = \frac{1}{2}(q-1)$] diejenigen Zahlen sind, die durch $a_i - a_j$ mit $i > j$ dargestellt werden, so gilt für die Differenz $D = A_k - k$ die Ungleichung $D > -\frac{1}{2}P + (P^2 + 1)/(3\pi - 2)$. — Verf. führt auch noch den allgemeineren Begriff: „ k -faches Gleichverteilungsmaß“ $\mu_k(E)$ ein. Falls $G(t_1, t_2, \dots, t_k)$ der Durchschnitt von $E, E_{t_1}, E_{t_2}, \dots, E_{t_k}$ ist, so wird es durch $\mu_k(E) = |E|^{-k-1} m_k(E)$ definiert, wo $m_k(E)$ das Minimum der (stetigen) Funktion G ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ beweist Verf. die Existenz von Mengen E mit $0 < |E| < \varepsilon$ und $\mu_k(E) > (\frac{1}{4})^{k+1}(1 - \varepsilon)$. Er spricht die Vermutung aus, daß der (für $k = 1$ bewiesene) Satz: „Die obere Grenze von $\mu_k(E)$ für sämtliche meßbaren Mengen E mit $|E| = \alpha$ ist gleich 1“ auch für beliebiges $k > 1$ gilt.

H. D. Kloosterman (Leiden).

Rogers, C. A.: The product of n real homogeneous linear forms. Acta math., København 82, 185—208 (1950).

Es seien x_1, \dots, x_n n reelle Linearformen in u_1, \dots, u_n mit der Determinante 1. u_1, \dots, u_n sollen alle ganzen Zahlen $\neq 0, \dots, 0$ durchlaufen. Es sei M_n obere Schranke für das Minimum von $|x_1 \cdots x_n|$. Ferner sei $M = \lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^{1/n}$. Es ist

$$|x_1 \cdots x_n| < n! (1 + n \log n) e^{3/2} (2,5 \log n)^{3/(2 \log n)} \pi^n (4n \sqrt{e})^{-n},$$

womit ein neuer Wert für M_n gefunden wurde. Daraus folgt $M \leq \frac{\pi}{4e \sqrt{e}}$. Der Nachweis erfolgt mit analytischen und zahlengeometrischen Methoden. Hofreiter.

Chalk, J. H. H.: Reduced binary cubic forms. J. London math. Soc. 24, 280—284 (1950).

Es sei $f(x, y)$ eine binäre kubische Form mit positiver Diskriminante D . Durch unimodulare Transformation kann die Kovariante $Q(x, y)$ von $f(x, y)$ in die Gestalt gebracht werden:

$$A x^2 + B x y + C y^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq B \leq A \leq C.$$

Dann heißt $f(x, y)$ reduziert, und es gilt

$$\min \{|f(1, 0)|, |f(0, 1)|, |f(1, 1)|, |f(1, -1)|\} \leq \sqrt{A/7}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für

$$f(x, y) = C_1(x^3 + x^2 y - 2x y^2 - y^3) \quad \text{oder} \quad C_2(x^3 + 2x^2 y - x y^2 - y^3).$$

Damit wurde die von Davenport [J. London math. Soc. 20, 14—22 (1945)] gefundene Abschätzung verschärft. Der Beweis erfolgt mit arithmetischen Überlegungen.

Hofreiter (Wien).

Mordell, L. J.: The minimum of a binary cubic form. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 13, 69—76 (1949).

Verf. gibt in dieser Vorlesung eine Skizze seiner grundlegenden Untersuchungen über kubische Formen und Geometrie der Zahlen. Vgl. Proc. London math. Soc., n. S. 48, 198—228 (1943).

K. Mahler (Manchester).

Chinč'in (Khintchine), A. Ja.: Ein Übertragungsgesetz für singuläre Systeme linearer Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 59, 217—218 (1948) [Russisch].

(Wir benutzen Matrixschreibweise; \mathfrak{D} sei eine Matrix mit reellen Elementen $\Theta_{\mu\nu}$, \mathfrak{o} die Nullspalte; durchweg sei $1 \leq \mu \leq m$, $1 \leq \nu \leq n$.) — Das System der homogenen Linearausdrücke (1) $\mathfrak{L}_{n1} = \mathfrak{D}_{nm} \mathfrak{x}_{m1} - \mathfrak{y}_{n1}$ gestattet bekanntlich nach einem elementaren Satz der Lehre von den diophantischen Approximationen für jedes $t \geq 1$ gleichzeitige Approximation der 0; diese Aufgabe erlaubt eine nicht-triviale Lösung $\mathfrak{x}_{m1} \neq \mathfrak{o}_{m1}$, \mathfrak{y}_{n1} derart, daß die $|x_\mu| \leq t^{n\mu}$ bleiben, aber doch $|L_\nu| < 1/t$ werden. Das System soll singulär heißen, wenn es dabei möglich ist, mit wesentlich kleineren $|x_\mu|$ auszukommen, genauer, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ für $t > T_\varepsilon$ eine Lösung gibt mit $|x_\mu| \leq \varepsilon t^{n\mu}$ (und natürlich wieder $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, $|L_\nu| < 1/t$). — Übertragungssätze streben danach, von Eigenschaften des Systems (1) auf das transponierte System (2) zu schließen, die Linearausdrücke (2) $\mathfrak{L}_{m1} = \mathfrak{D}_{mn} u_{n1} - v_{m1}$, wo \mathfrak{D}' die gestürzte Matrix zu \mathfrak{D} bezeichnet. — Verf. beweist überraschend einfach: Ist (1) singulär, so auch (2). Der Beweis ruht auf Mordells Methode der zusätzlichen Unbestimmten.

Egon Ullrich (Gießen).

Chinčĭn (Khintchine), A. Ja.: Zur Theorie der linearen diophantischen Approximationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 59, 865—867 (1948) [Russisch].

Verf. gibt die unten folgende quantitative und wesentliche Verschärfung des Approximationssatzes von Kronecker, die besonders darum Beachtung verdient, weil sie fast alle Sätze als einfache Sonderfälle in sich schließt, welche bisher in der allgemeinen Theorie der inhomogenen linearen Diophantischen Approximationen bewiesen sind; insbesondere werden in dieser Note zwei Sätze von Jarník daran angeschlossen (dies. Zbl. 21, 104). — Es sei immer: $1 \leq \mu \leq m$, $1 \leq \nu \leq n$;

$$\Theta_{\mu\nu}, \alpha_\nu \text{ reell; } S_\nu = \sum_{\mu} \Theta_{\mu\nu} x_\mu - y_\nu, \quad T_\mu = \sum_{\nu} \Theta_{\mu\nu} u_\nu - v_\mu; \quad u = \max |u_\nu|;$$

$T = T(u_\mu, v_\nu) = \max |T_{\mu}|$; $A = A(u_\nu) = \left| \sum_{\nu} \alpha_\nu u_\nu - w \right|$, w die der Summe nächste ganze Zahl. Der Kroneckersche Satz beantwortet grundsätzlich die Frage, unter welchen Bedingungen das gegebene System linearer Gleichungen $S_\nu - \alpha_\nu = 0$ in ganzen Zahlen x_μ, y_ν mit beliebiger Genauigkeit lösbar ist. — Khintchines quantitative Verschärfung lautet nun: „Sei $\varphi(t)$ eine positive, stetige, nicht-abnehmende Funktion von $t > 0$, $\psi(t)$ die Umkehrfunktion zu $t\varphi(t)$. Für die Existenz positiver Konstanten c_1, c_2 , derart, daß das System von Ungleichungen

$$|S_\nu - \alpha_\nu| < c_1/t, \quad |x_\mu| < c_2\varphi(t),$$

für jedes $t > 0$ eine ganzzahlige Lösung x_μ, y_ν gestatte, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Konstanten $\Gamma > 0$ so, daß für ein beliebiges System ganzer Zahlen u_ν, v_μ

$$A = 0 \text{ bei } uT = 0, \text{ bzw. } A < \Gamma u : \Psi(u/T) \text{ bei } uT > 0$$

gilt“.

Egon Ullrich (Gießen).

Schneider, Theodor: Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. Math. Ann., Berlin 121, 131—140 (1949).

Die Untersuchungen über ganzwertige Funktionen wurden eingeleitet durch den Satz von Pólya, daß unter allen ganzen transzendenten Funktionen $f(z)$ mit ganzzahligen Werten $f(0), f(1), f(2), \dots$ die Funktion 2^z das kleinste Wachstum aufweist. Eine Übertragung von Pólyas Methode führte dann Gelfond zu dem Transzendenzbeweis für $a^b = e^{b \log a}$ mit algebraischem $a \neq 0$, $\log a \neq 0$ und imaginärquadratischem b . Verf. beweist einen recht allgemeinen Satz, welcher gewisse arithmetische Eigenschaften von gegebenen algebraisch unabhängigen analytischen Funktionen und ihren Ableitungen an gegebenen Stellen in Beziehung zu ihren Wachstumseigenschaften setzt, und zeigt dann, daß ein großer Teil der bekannten Transzendenzsätze ein Spezialfall seines Satzes ist. *Siegel* (Princeton).

Analysis.

Mengenlehre:

Denjoy, Arnaud: Recurrence et antirecurrence. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 637—640 (1949).

Verf. charakterisiert die Menge der natürlichen Zahlen durch folgende Eigenschaften: 1. Die Menge ist linear geordnet, und zwar so, daß sie ein Anfangselement 1 besitzt und zu jedem Element ein späteres existiert. 2. Die zwischen 1 und einem beliebigen Elemente der Menge stehenden Elemente bilden eine endliche Menge. — Der Begriff der endlichen Menge wird dabei so verstanden, wie er vom Verf. früher eingeführt wurde (dies. Zbl. 29, 114). Diese Definition der natürlichen Zahlen enthält nicht die Idee der Rekursion (oder Antirekursion). *W. Ackermann.*

Wagner, Klaus: Charakterisierung wohlgeordneter Mengen und der Zahlengeraden mit Hilfe eines allgemeinen Metrisierbarkeitsbegriffes. Math. Ann., Berlin 120, 502—513 (1949).

M bezeichne eine (total) geordnete Menge; man kann also im Sinne von Dedekind von Klasseneinteilungen, durch eine Klasseneinteilung definiertem Schnitt, Sprung oder Lücke sprechen. Die für $a \leq b$ definierte Abbildung $\alpha(ab)$ wird eine Metrik und M in sich metrisierbar genannt, wenn $\alpha(am)$ für jedes feste a eine ähnliche Abbildung von M auf M ist. (Eine geordnete Menge M ist dann und nur dann in sich metrisierbar, wenn sich jeder obere Abschnitt von M ähnlich auf M abbilden läßt.) Man definiert $\alpha(ab) + \alpha(bc) = \alpha(ac)$ für $a \leq b \leq c$. Wenn aus $\alpha(ab) = \alpha(a'b')$, $\alpha(bc) = \alpha(b'c')$ immer $\alpha(ac) = \alpha(a'c')$ folgt, nennt Verf. die Metrik additiv; ähnlich definiert er die Kommutativität der Metrik. Verf. gibt eine vollständige Charakterisierung der wohlgeordneten, in sich metrisierbaren Mengen an und beweist u. a. die folgenden Sätze. Die Metrik der Zahlengerade sowie die der ganzen Zahlen sind die beiden in sich abgeschlossenen Metriken (die Metrik ist in sich abgeschlossen, wenn in M die obere Grenze existiert). Eine kommutative und additive Metrik ist dann und nur dann Teilmetrik der Zahlengerade, wenn sie stetig ist. — Leider spricht der Verf. weder von der durch die Ordnung definierten Topologie, noch von der durch die Metrik erzeugten algebraischen Struktur, was den Vergleich seiner Resultate mit bekannten Sätzen sehr erschwert. *Fáry.*

Wagner, Klaus: Verallgemeinerung des Brouwerschen Invarianzsatzes der Dimensionszahl mittels eines allgemeinen Stetigkeitsbegriffes von Abbildungen mehrfach geordneter Mengen. Math. Ann., Berlin 120, 514—532 (1949).

Bezeichnen X^v ($v = 1, \dots, n$) total geordnete Mengen (s. vorsteh. Referat), und $X = X^1 \times \dots \times X^n$ die entsprechende mehrfach geordnete Menge. Verf. nennt die Abbildung $f(x) = y$ ($x \in X$, $y = Y = Y^1 \times \dots \times Y^m$, Y_i einfach geordnet) in sich stetig in $x_0 \in X$, wenn es für $y_1^\mu < y_0^\mu < y_2^\mu$, $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1, 2$ (x^μ , y^μ ist die μ -te Koordinate von x , y) ein Intervall um x_0 gibt, für deren Punkte $y_1^\mu < y^\mu < y_2^\mu$ gilt. (Jede monotone reelle Funktion ist in sich stetig.) Er beweist die folgende Verallgemeinerung des Brouwerschen Satzes über Invarianz der Dimension. Ist l_x bzw. l_y die Anzahl der überall lückenhaften Koordinatenmengen von X bzw. Y , so gibt es keine topologische (d. h. hier eineindeutige und in beiden Richtungen in sich stetige) Abbildung von X auf Y , wenn $n - l_x \neq m - l_y$. Zum Beweis wird der Satz erst für lückenlose Mengen, dann für stetige Mengen spezialisiert, und im ersten Teil der Brouwersche Satz benutzt. — Die Arbeit würde gewinnen, wenn der Verf. mit der Ordnung auch die induzierte Topologie betrachten würde. [Vgl. jedoch S. 517, ¹⁵.] *Fáry* (Paris).

Ljapunov, A. A.: Über die effektive Meßbarkeit. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 13, 357—362 (1949) [Russisch].

Eine abgeschlossene Menge des Baireschen Nullraumes heißt „effektiv vorgegeben“, wenn die zu ihr fremden Baireschen Intervalle gegeben sind. Eine Menge

vom Typus F_σ ist effektiv vorgegeben, wenn sie Summe von effektiv vorgegebenen abgeschlossenen Mengen ist. Die Menge E ist „effektiv nicht vom Maß Null“, wenn man zu jeder effektiv vorgegebenen Menge F_σ mit vollständigem Maß einen solchen Punkt x effektiv konstruieren kann, daß $x \in E$ und $x \in F_\sigma$. E ist „effektiv nicht von der ersten Kategorie“, wenn man zu jeder effektiv vorgegebenen Menge F_σ einen solchen Punkt x effektiv konstruieren kann, daß $x \in E$ und $x \in F_\sigma$. Es wird bewiesen, daß jede Menge, die effektiv nicht vom Maß Null ist, ein F_σ von positivem Maß und jede Menge, die effektiv nicht von erster Kategorie ist, ein F_σ von zweiter Kategorie enthält. — Diese Begriffe spielen eine ähnliche Rolle in der Theorie des Maßes bzw. der Kategorie wie der von Novikov [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 3, 35—40 (1939); dies. Zbl. 24, 301] eingeführte Begriff der effektiv nicht-abzählbaren Menge in der Theorie der Mächtigkeit. Császár (Budapest).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Menger, Karl: Are variables necessary in calculus? Amer. math. Monthly 56, 609—620 (1949).

Ist f eine Funktion, für die ein individuelles Symbol vorliegt (z. B. \sin , \exp usw.), so kann man statt $\int_a^b f(x) dx$ kurz $\int_a^b f$ schreiben. (Verf. schlägt auch für andere häufig auftretende Funktionen individuelle Symbole vor: für $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ das Symbol $p_{a_0 a_1 \dots a_n}$, für x^n das Symbol ${}^n H$, für die Identität das Symbol j). Für die Ableitung einer Funktion f kann man Df schreiben. Verwendet man diese variablenfreie Schreibweise, so treten u. a. bei der Substitution Schwierigkeiten auf. Verf. zeigt, wie man diese Schwierigkeiten überwinden kann. *Nöbeling*.

● Hildebrand, F. B.: Advanced calculus for engineers. New York: Prentice-Hall 1949. XIV, 594 p.; \$ 6,00.

● Fichtengol'c (Fichtenholz), G. M.: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. III. Moskau und Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für techn. theor. Lit. 1949. 738 S.; 19,35 Rubel [Russisch].

Kapitelüberschriften: Kap. 15. Kurvenintegrale, Stieltjessche Integrale. Kap. 16. Doppelintegrale. Kap. 17. Flächeninhalte, Flächenintegrale. Kap. 18. Drei- und mehrfache Integrale. Kap. 19. Fouriersche Reihen. Kap. 20. Fouriersche Reihen (Fortsetzung). Der abschließende dritte Teil des Werkes (vgl. dies. Zbl. 33, 107) bringt also in großer Ausführlichkeit diejenigen Gebiete der Integralrechnung, die in den meisten Lehrbüchern nur kurz behandelt zu werden pflegen. Besonderer Wert ist auch wieder auf sorgfältige Klärung der Grundbegriffe, Existenzfragen usw. gelegt; oft werden Überlegungen aus der Geometrie und der Mechanik zur Veranschaulichung herangezogen; viele Zahlenbeispiele sind durchgerechnet. Kap. 18 enthält u. a. im Zusammenhang mit dem Gaußschen Satz einen Abriß der Vektoranalysis. Kap. 19 behandelt vornehmlich die Konvergenz der Fourierschen Reihen, und zwar unter Zugrundelegung des Riemannschen Integralbegriffs, das Fouriersche und Dirichletsche Integral und die Entwicklung willkürlicher Funktionen; Kap. 20 beschäftigt sich mit Abschätzungs- und Summierungsproblemen. *W. Hahn* (Berlin).

● Grebenčā, M. K. und S. I. Novoselov: Kursus der mathematischen Analysis. Bd. I. — 2. Aufl. Moskau: Lehrpädagogischer Staatsverlag des Unterrichtsministeriums 1948. 520 S., 13,20 Rubel [Russisch].

Wie Verf. besonders betonen, legen sie auf eine sorgfältige Darlegung der analytischen Grundbegriffe Wert, da das Buch vor allem für die Hand des Studierenden gedacht ist. Sie stellen daher den Stoff sehr breit dar, zerlegen ihn in eine Fülle von Definitionen, Hilfssätzen und Lehrsätzen und bringen zahlreiche Veranschaulichungen und Beispiele. Trotzdem ist es zweifelhaft, ob das Werk dem Lernenden nun wirklich ganz klare Begriffe vermitteln kann; denn sowohl gegen die Anordnung des Stoffes wie gegen die Durchführung der Gedankengänge im einzelnen lassen sich mancherlei Einwände erheben. Die Existenz der reellen Zahlen wird z. B. einfach vorausgesetzt; der Funktionsbegriff wird vor dem Grenzwertbegriff entwickelt (die Zahlenfolge erscheint dabei als Sonderfall der Funktion), und auch sonst kommt öfter das begrifflich Einfachere nach dem Schwierigeren. Sodann sind mehrfach eng zusammengehörnde Dinge auseinandergerissen (z. B. Mittelwertsatz und Rollescher Satz), was sicher dem Leser nicht dazu

verhilft, einen Gesamtüberblick zu gewinnen. Außerdem ist stellenweise die klare Gedankenführung „im kleinen“ zu vernissen; so mancher formulierte und besonders bewiesene Satz ist nicht viel mehr als eine Erläuterung von vorher gegebenen Definitionen, und die nun wirklich grundlegenden Sätze verlieren bei dieser Konkurrenz etwas an Gewicht. — Kapitelüberschriften: Funktionsbegriff; Theorie der Grenzwerte; stetige Funktionen; elementare Funktionen; die Ableitung; Hauptsätze der Differentialrechnung; Anwendung der Differentialrechnung bei der Untersuchung von Funktionen; der Taylorsche Satz; Bestimmung der Stammfunktion; bestimmte Integrale; Anwendung der Integralrechnung; uneigentliche Integrale. Zum Kapitel „Taylorscher Satz“ sei noch bemerkt, daß von unendlichen Reihen im übrigen noch nicht gehandelt wird. *W. Hahn (Berlin).*

• **Chin'cin (Khintchine), A. Ja.:** Acht Vorlesungen zur mathematischen Analysis.

3. Aufl. Moskau, Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1948. 260 S., 10 Rubel [Russisch].

Das Buch wendet sich an Leute, die, ohne eigentlich Mathematiker zu sein, ständig mit höherer Mathematik zu tun haben und das Bedürfnis verspüren, deren Grundlagen in einwandfreier Gestalt kennen zu lernen. Es bildet zugleich eine — besonders für das russische Sprachgebiet erwünschte — Ergänzung zu denjenigen Lehrbüchern der Analysis, die die Grundlagen nicht in voller Ausführlichkeit und Strenge behandeln. Dementsprechend bringt Verf. vor allem Grundbegriffe und die wichtigsten Existenzsätze, wobei er voraussetzt, daß der Leser im wesentlichen weiß, worum es sich handelt. — Kapitelüberschriften: I. Das Kontinuum. II. Grenzwerte. III. Funktionen. IV. Reihen. V. Die Ableitung. VI. Das Integral. VII. Reihenentwicklung von Funktionen. VIII. Differentialgleichungen. *W. Hahn (Berlin).*

• **Timofeev, A. F.:** Die Integration der Funktionen. Moskau und Leningrad:

Staatsverlag für techn. theor. Lit. 1948. 432 S., 12,50 Rubel [Russisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, eine umfassende Darstellung der sog. elementaren Integrationsmethoden zu geben, die in den modernen Lehrbüchern der Analysis meist ziemlich kurz behandelt werden. Er untersucht diejenigen unbestimmten Integrale, die sich mittels rationaler, trigonometrischer und Exponentialfunktionen sowie deren Umkehrungen in geschlossener Form ausdrücken lassen, wobei er besonderen Wert darauf legt, die dem jeweiligen Fall angepaßte Methode (partielle Integration, Einführung neuer Veränderlicher, Reduktion usw.) zu entwickeln. Die große Anzahl (über 1300) der so berechneten Integrale, durch die das Buch teilweise den Charakter einer Integraltafel erhält, läßt annehmen, daß Verf. so ziemlich alle mit den genannten Methoden überhaupt zu bewältigenden Integranden erfaßt hat. Über den skizzierten Rahmen hinaus geht nur eine kurze Ausführung, wie man die elliptischen Integrale auf die Normalformen bringen und in Reihen entwickeln kann. — Die Untersuchungen beschränken sich auf das reelle Gebiet. *W. Hahn (Berlin).*

Kappos, Demetrios A.: Die Cartesischen Produkte und die Multiplikation von Maßfunktionen in Booleschen Algebren. II. Math. Ann., Berlin 121, 223—233 (1949).

Es wird zuerst für die einfachen Ortsfunktionen eines vollkommenen Booleschen Ringes bezüglich einer total additiven, reduzierten und normalen Maßfunktion φ das Integral $\int f d\varphi$ erklärt und daraus durch Grenzübergang nach Fundamentalfolgen einfacher Ortsfunktionen das Integral für beliebige endliche Ortsfunktionen (nach dem Vorbild von Carathéodory). Die Sätze der Integrationstheorie ergeben sich in einfacher Weise nach bekannten Mustern. Dann werden auf dem das Cartesische Produkt zweier vollkommenen Booleschen Ringe R_1 und R_2 umfassenden kleinsten Booleschen Ring \bar{L} die einfachen endlichen Ortsfunktionen f_{xy} zweier Variablen erklärt. Es wird gezeigt, daß diese Menge wiederum dicht liegt in der Menge aller endlichen Ortsfunktionen auf \bar{L} . Ist ein $a \in L$ gleich $a_1 \times a_2$, $a_1 \in R_1$, $a_2 \in R_2$ und ist $\varphi(a) < \infty$ für die Produktmaßfunktion φ der Maßfunktionen φ_1 und φ_2 von R_1 und R_2 , so gilt für jede über a summierbare Ortsfunktion der Satz von Fubini

$$\int_a f d\varphi = \int_{a_1} \left(\int_{a_2} f d\varphi_2 \right) d\varphi_1 = \int_{a_2} \left(\int_{a_1} f d\varphi_1 \right) d\varphi_2. \quad (\text{Für Teil I vgl. dies. Zbl. 29, 19.})$$

G. Köthe (Mainz).

Helsel, R. G. and T. Radó: The Cauchy area of a Fréchet surface. Duke math. J. 15, 159—167 (1948).

Verf. vergleicht zwei nach unten halbstetige Flächenbegriffe, die für Fréchet'sche Flächen T : $x = x(u, v), \dots, z = z(u, v)$ ($u^2 + v^2 \leq 1$) vom Typ der 2-Zelle definiert sind; der eine ist das eingehend studierte Lebesguesche Flächenmaß $A(T)$.

Der andere das von Radó, Proc. nat. Acad. Sci. USA **31**, 102—106 (1945), eingeführte Cauchysche Flächenmaß $C(T)$, dessen Definition hier nicht gebracht werden soll. Unter Benutzung eines Resultates von Cesari beweist Verf. das Theorem, daß stets $C(T) = A(T)$ ist, was bisher Federer, Trans. Amer. math. Soc. **59**, 441—466 (1946), nur für den Fall gezeigt hatte, daß T einer Lipschitz-Bedingung genügt. E. Hölder (Leipzig).

Salem, R.: Sur les sommes Riemanniennes des fonctions sommables. Mat. Tidsskr. B, København **1948**, 60—62 (1948).

E noto che se $f(x) \in L$ è di periodo 1 e si considera la somma di Riemann

$$M_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(x + \frac{r}{n}\right), \text{ allora se la successione di interi } \{n_k\} \text{ è tale che } n_{k+1}$$

sia divisibile per n_k , qualunque sia k , si ha

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} M_{n_k}(f, x) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Si dimostra che se $f(x)$ soddisfa inoltre alla relazione

$$\int_0^1 |f(x+h) - f(x)| dx = O\left(\frac{1}{(\log 1/h)^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0),$$

allora la (1) sussiste per ogni successione $\{n_k\}$ tale che sia convergente la serie $\sum (\log n_k)^{-(1+\delta)}$ (con $0 < \delta < \varepsilon$). Sandro Faedo (Roma).

Matík, Jan: Abschätzung des absoluten Betrages von Integralen und Kriterien für die Konvergenz uneigentlicher Integrale. Časopis Mat. Fysiky, Praha **73**, D 3—D 6 (1948) [Tschechisch].

Verf. beweist zunächst folgende Abschätzung:

$$(a) \quad \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq (V + |g(b)|) \left| \int_a^\xi f(x) dx \right|,$$

welche unter den Voraussetzungen gilt, daß von den beiden reellen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Funktion $f(x)$ in $a \leq x \leq b$ integrierbar, $g(x)$ daselbst von beschränkter Variation V und $a \leq \xi \leq b$ ist. Hierauf wird erwähnt, daß (a) auch im Komplexen richtig bleibt, wenn K einen rektifizierbaren Kurvenbogen der Gaußschen Zahlenebene mit den Endpunkten a und b bedeutet, über welchen zu integrieren ist, $f(x)$ längs K integrierbar ist, $g(x)$ K auf einen Kurvenbogen mit der endlichen Länge V abbildet und $\xi \in K$. — Über die Konvergenz uneigentlicher Integrale werden zwei Sätze angegeben. Satz 1. In $a \leq x \leq b$, wobei auch $b = \infty$ sein kann, seien zwei reelle Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert. Existiert für jedes c ,

$a < c < b$, das eigentliche Integral $\int_a^c f(x) dx$, ferner das eigentliche oder uneigent-

liche Integral $\int_a^b f(x) dx$ und ist $g(x)$ in $a \leq x \leq c < b$ von beschränkter Variation $V(a, c)$, wobei $V(a, c)$ gleichmäßig beschränkt bleibt, so existiert das eigentliche oder uneigenliche Integral $\int_a^b f(x) g(x) dx$. Satz 2. Satz 1 bleibt auch richtig, wenn statt

der Existenz von $\int_a^b f(x) dx$ die gleichmäßige Beschränktheit von $\left| \int_a^c f(x) dx \right|$ und über $g(x)$ zusätzlich $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ vorausgesetzt wird. Sämt-

liche Integrale sind im Riemannschen Sinne zu verstehen. Lammel (Tutzing).

Ghosh, P. K.: On Abel-convergent integrals and their application to mathematical physics. Bull. Calcutta math. Soc. **41**, 143—152 (1949).

Es treten oft bei Anwendungen der Quantenmechanik unendliche Integrale auf, welche im strengen Sinne nicht konvergent sind, wie etwa bei Herleitung der Rutherford'schen Streuungsformel nach Born und Wentzel oder bei Bethes Untersuchung des Durchgangs rascher Teilchen durch Materie. In beiden Fällen ist die zu integrierende Funktion oszillierend. Verf. stellt sich die Aufgabe, diese Integrale für das strenge mathematische Gewissen sozusagen zu retten. Die Rettung kommt nun in der Weise, daß die Integrale durch ihre sogenannten Abelschen Werte ersetzt

werden. Liegt etwa das Integral: $F(x) = \int_0^x \sin t \, dt = 1 - \cos x$ vor, so ist $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ nicht definierbar, wohl aber der vom Verf. definierte Abelsche Wert davon:

$$A - \int_0^{\infty} \sin t \, dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t/x} \sin t \, dt \right] = 1.$$

Verf. zeigt sodann, daß die Abelschen Werte der Integrale von Born und von Bethe die erwünschten Formeln ergeben, nachdem er zuvor einige Eigenschaften Abelskonvergenter Integrale begründet hat.

S. C. Kar (Calcutta).

Ostrowski, A. M.: On some generalizations of the Cauchy-Frullani integral. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 612—616 (1949).

Für $\alpha - 1 < 0 < a, b, \alpha$ besteht

$$\cos \frac{\pi \alpha}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \{ |\operatorname{tg} a x|^{\alpha} - |\operatorname{tg} b x|^{\alpha} \} = \ln \frac{a}{b}.$$

Ist allgemeiner Integrabilität von f und Existenz der Mittelwerte

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \int_1^{\infty} dt \, f(t^{\pm 1}) = m_{\pm}(f)$$

vorausgesetzt, so gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t} [f(at) - f(bt)] = [m_+(f) - m_-(f)] \ln \frac{a}{b}.$$

Unter geeigneten Einschränkungen für g, φ, ψ wird endlich in Verallgemeinerung eines Lerchschen Ansatzes der Ausdruck $\int_0^{\infty} dx [\psi' g(\psi) - \varphi' g(\varphi)]$ durch Mittelwerte wie (1) bestimmt.

W. Maier (Jena).

Lauwerier, H. A.: A note on a logarithmic transcendant. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. **23**, 163—169 (1950).

Verf. definiert die logarithmischen Transzendenten

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln^2(1-t)}{t} dt - \frac{1}{3} \ln x \cdot \ln^2(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{\ln^2(1+t)}{t} dt - \frac{1}{3} \ln x \cdot \ln^2(1+x), \quad x \geq 0;$$

$$\chi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t) \ln(1+t)}{t} dt - \frac{1}{3} \ln x \cdot \ln(1-x) \ln(1+x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\theta(x) = \int_1^x \frac{\ln^2(t-1)}{t} dt - \frac{1}{3} \ln x \cdot \ln^2(x-1), \quad x \geq 1.$$

$\psi(x)$, $\chi(x)$, $\theta(x)$ lassen sich durch folgende Relationen auf $\varphi(x)$ zurückführen:

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{1+x}\right), \quad \chi(x) = \frac{1}{4}\varphi(x^2) - \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

$$\theta(x) = \varphi(1) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right) - \varphi\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

$\varphi(x)$ erfüllt die Funktionalgleichungen

$$\varphi(1-x^2) + 4\varphi\left(\frac{1}{1+x}\right) - 4\varphi(1-x) + 4\varphi\left(\frac{x}{1+x}\right) = \varphi(1),$$

$$2\varphi(x^2) - \varphi\left[\frac{4x}{(1+x)^2}\right] + 8\varphi\left(\frac{2x}{1+x}\right) - 8\varphi(x) - 8\varphi\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0.$$

Die Bestimmung von manchen Werten der Funktion $\varphi(x)$ führt auf den in $s=3$ genommenen Wert der ζ -Funktion:

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\varphi(1) = 4\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\varphi\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{18}{7}\varphi\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{14}\varphi\left(\frac{8}{9}\right);$$

$$18 \cdot \varphi\left(\frac{2}{3}\right) \leq \zeta(3) \leq 25 \cdot \varphi\left(\frac{2}{3}\right).$$

Verf. untersucht auch das Integral $\xi(x) = \int_0^x \frac{\ln^2(t + \sqrt{1+t^2})}{t} dt$. — Der Artikel ent-

hält mehrere störende Druckfehler, z. B. ist in der fünften Zeile der S. 166 $\frac{x-1}{x}$ die richtige obere Grenze des Integrals und nicht $\frac{x}{x-1}$; auf S. 167, vierte Zeile von unten fehlt der Faktor e^u im zweiten Integranden, usw. *Aczél* (Miskolc).

Ryšavý, Vladimír: Zwei elliptische Kubaturen. *Časopis Mat. Fysiky, Praha* **73**, D52—D56 (1949) [Tschechisch].

Verf. behandelt zwei Kubaturen, welche auf elliptische Integrale führen. Zunächst bestimmt er das Volumen desjenigen Körpers, dessen Berandungsfläche Einhüllende derjenigen einparametrischen Kugelschar ist, welche aus den durch $(0, 0, 0)$ hindurchgehenden Kugeln besteht, deren Mittelpunkte auf

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \quad z = 0$$

liegen. Die Einhüllende hat die Gleichung $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2)$. Hierauf berechnet Verf. das Volumen des durch die Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 b^2 \frac{x^2 + y^2}{a^2 x^2 + b^2 y^2}$$

begrenzten Körpers. x , y und z sind räumliche rechtwinklige kartesische Koordinaten. *Lammel* (Tutzing).

Rodero, Julian: Ein Fall der Reduktion von Integralen, in denen der Integrand eine rationale Funktion von Kubikwurzeln ist. *Gac. mat., Madrid, I. S.* **1**, 269—274 (1949) [Spanisch].

Cinquini, Silvio: Sopra il cambiamento delle variabili negli integrali doppi. *Boll. Un. mat. Ital., III. S.* **4**, 228—235 (1949).

Die Transformation von Doppelintegralen auf neue Veränderliche wurde von Euler durch wiederholte Integration bewirkt, während Goursat, auf Gauß und Green zurückgehend, die vollständige Zerlegung des Integrationsgebietes an die Spitze stellte. Werden nur wenige Voraussetzungen gemacht über Grenzen und Integranden, so gabelt sich die Möglichkeit der Beweisführung wesentlich in 3 Typen, deren Leistungsfähigkeit unter didaktischen Gesichtspunkten gegeneinander abgewogen wird. *Wilhelm Maier* (Jena).

Bottema, O.: Der Mittelwertsatz der Integralrechnung für Polynome von zwei Veränderlichen. *Nieuw Arch. Wiskunde, II. S.* **23**, 108—110 (1950) [Holländisch].

Verf. beweist: Es sei $n > 0$ ganz; z_n die größte Nullstelle des Legendreschen Polynoms $P_n(z)$; $f(x, y)$ ein Polynom mit einem Grade $< 4n$; G der Einheitskreis in der XY -Ebene. Dann gibt es in G einen Punkt P , dessen Entfernung r zum Koordinatenanfang den Ungleichungen $\frac{1}{2}(1 - z_n) < r^2 < \frac{1}{2}(1 + z_n)$ genügt, und derart, daß das über G erstreckte Integral von $f(x, y)$ gleich $\pi f(P)$ ist. Die Ungleichungen für r können nicht verschärft werden. *Kloosterman (Leiden).*

Cellitti, C.: Circa il „teorema del valor medio“ e il „teorema del valor medio generalizzato“. *Periodico Mat.*, IV. S. 27, 122—125 (1949).

Elementare didaktische Bemerkungen zum Beweis der beiden Mittelwertsätze der Differentialrechnung. *Egon Ullrich (Gießen).*

Tricomi, Francesco: Sugli zeri delle funzioni di cui si conosce una rappresentazione asintotica. *Ann. Mat. pura appl.*, Bologna, IV. S. 26, 283—300 (1947).

Verf. gibt zunächst einen allgemeinen Satz über die asymptotische Darstellung einer durch eine Gleichung $f(x, \mu) = 0$ implizit erklärten Funktion $x = x(\mu)$. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die reelle Funktion $f(x, \mu)$ für $\mu \rightarrow 0$ eine gleichmäßig hinsichtlich x gültige asymptotische Darstellung n -ter Ordnung nach Potenzen von μ gestattet:

$$(1) \quad f(x, \mu) = g_0(x) + \sum_{k=1}^n g_k(x) \mu^k + O(\mu^{k+1}),$$

wobei die $g_\nu(x)$ in der Nachbarschaft einer einfachen Nullstelle x_0 von $g_0(x)$ hinreichend oft differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar) sein sollen. Unter Benützung eines früheren Hilfssatzes (s. dies. Zbl. 34, 337) wird eine Lösung mit der Darstellung

$$(2) \quad x_0^* = x_0 + \sum_{k=1}^n w_{k-1} \mu^k + O(\mu^{n+1})$$

aufgewiesen, zur Berechnung der w_{k-1} ein Verfahren der unbestimmten Koeffizienten begründet. Das Ganze kann als reelles Seitenstück zu einem älteren funktionentheoretischen Satze des Ref. betrachtet werden [Math. Ann., Berlin 113, 629—656 (1937) Satz 8; dies. Zbl. 16, 208], bei dem allgemeine Skalenfunktionen an Stelle der Potenzen zugelassen werden. Verf. läßt übrigens, in anderer Richtung allgemeiner, zu, daß die g_k , und damit auch die w_{k-1} , auch noch von μ abhängig sind, so daß dann (2) nicht notwendig mehr eine Poincarésche asymptotische Darstellung im eigentlichen Sinne zu sein braucht. — Als Anwendung werden zuerst die bekannten asymptotischen Reihen für die Nullstellen der Besselfunktionen hergeleitet; ein Rechenvorteil gegenüber bekannten Verfahren dürfte hier kaum bestehen. Ferner werden die Nullgebilde einer Kummerschen Reihe ${}_1F_1(-a, c, x)$ untersucht. Es sei der Hinweis gestattet, daß ein Hauptergebnis, Formel (35) „la cui importanza non a bisogno d'illustrazione“ in einer vom Ref. früher [Math. Z. 43, 533—552 (1938), insbes. 541 (15); Fortschr. d. Math. 64_I, 264—265] angegebenen und sogar als konvergent nachgewiesenen Entwicklung enthalten ist. Zum Schluß Anwendung auf Nullstellen Legendrescher Funktionen [vgl. auch Ref. a. a. O. S. 543, Formel (19)]. Die Angabe $r = 1, 2, \dots, n$ bei Formel (41) des Textes muß wohl als mißverständlich bezeichnet werden. Gemeint ist, wie Verf. dem Ref. brieflich mitgeteilt hat, $0 < \vartheta_1 \leq r/n \leq \vartheta_2 < 1$ bei $n \rightarrow \infty$. *Hermann Schmidt (Braunschweig).*

Conti, Roberto: Due criteri di convergenza uniforme per le successioni di funzioni monotone di due variabili in un rettangolo e nel piano. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII S. 6, 202—207 (1949).

Verf. nennt eine in dem Rechteck $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ definierte Funktion eine M -Funktion, wenn für jedes $\bar{x} [\bar{y}]$ von $(a, b) [(c, d)]$ die Funktion $f(x, y)$ eine nicht wachsende oder nicht abnehmende Funktion von $y [x]$ ist; dabei ist nicht ausgeschlossen, daß die Funktion $f(x, y)$ für ein gewisses $\bar{x} [\bar{y}]$ nicht abnimmt und für ein gewisses $\bar{x} \neq \bar{x} [\bar{y} \neq \bar{y}]$ nicht zunimmt. — Verf. beweist, daß, wenn $\{f_n(x, y)\}$ eine Folge von M -Funktionen im Rechteck R ist, die gegen eine stetige

Funktion $f(x, y)$ konvergiert, die Funktion $f(x, y)$ ebenfalls eine M -Funktion und die Konvergenz gleichmäßig ist. — Setzt man voraus, daß die Folge $\{f_n(x, y)\}$ in der ganzen Ebene definiert ist und die $f_n(x, y)$ beschränkt und monoton in bezug auf jede einzelne Variable sind, so wird der Satz unter geeigneten Bedingungen für die Funktionen $f_n(x, \mp\infty)$, $f_n(\mp\infty, y)$ auf den Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = f(x, y)$ mit stetigem $f(x, y)$ ausgedehnt.

Giovanni Sansone (Florenz).

Ottaviani, Giuseppe: Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ di una successione di funzioni di una variabile, a variazione limitata, e sua estensione alle funzioni di due (o più) variabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 291—297 (1949).

R. Conti (questo Zbl. 30, 348) ha dato una condizione sufficiente (ma non necessaria) perchè una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni a variazione limitata in $(-\infty, \infty)$ converga uniformemente verso una funzione $f(x)$ pure a variazione limitata in $(-\infty, \infty)$. — L'A. dimostra che condizione necessaria e sufficiente perchè si verifichi la proprietà dichiarata è che si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x-) = f(x-), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x+) = f(x+),$$

$$V_{(-\infty)}^{(\infty)}(f_\infty) = V_{-\infty}^\infty(f)$$

dove $V_{-\infty}^\infty(f)$ è la variazione totale di $f(x)$ in $(-\infty, \infty)$ e $V_{(-\infty)}^{(\infty)}(f_\infty)$ si ottiene operando opportunamente sui numeri

$$\text{extr. sup. } |f_n(y) - f_n(x)|.$$

$$\alpha \leq x < y \leq \beta$$

L'A. estende il suo teorema alle funzioni di due variabili a variazione doppia finita secondo Tonelli e contemporaneamente a variazione limitata su ogni parallela all'asse x e all'asse y , e più in particolare alle funzioni tali che

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) \geq 0 \text{ per } \Delta x > 0, \Delta y > 0.$$

Giovanni Sansone (Firenze).

Cotlar, M. und E. Roxin: Über die Variation von unstetigen und mehrdeutigen Funktionen einer reellen Veränderlichen. Rev. Un. mat. Argentina 14, 38—46 (1949) [Spanisch].

Soit f une fonction réelle (pas nécessairement uniforme) d'une variable réelle; soient J un intervalle ouvert, semi-ouvert ou fermé et $\sigma(J)$ une partition finie de J en des intervalles ouverts, semi-ouverts ou fermés, disjoints deux à deux; soient $\omega_f(J)$ l'oscillation de f dans J et $\omega_f(x)$ l'oscillation de f en x . On appelle variation totale de f dans J la borne supérieure $V_f(J)$ des sommes $\sum_{J_i \in \sigma(J)} \omega_f(J_i)$, correspondante

à toutes les partitions $\sigma(J)$. Les AA. démontrent la formule

$$V_f(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_f(y, C(J)) dy + \sum_{x \in J} \omega_f(x),$$

$N_f(y, C(J))$ étant le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ appartenant à l'ensemble $C(J)$ des points de J où f est continue. Si f est uniforme et continue, $V_f(J)$ prend son sens habituel et on retrouve la formule de Banach

$$V_f(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_f(y, J) dy.$$

A. Pereira Gomes (Nancy).

Froda, Alexandre: Sur la réoscillation de voisinage des fonctions de variables réelles. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1200—1201 (1948).

Es sei $f(P)$ eine reelle Funktion im n -dimensionalen euklidischen Raume. $\omega_0(f, P)$ bezeichne die Oszillation von $f(P)$ im Punkte P mit Vernachlässigung des Funktionswertes im Punkte P selbst. Eine transfinite Folge von Oszillationen

wird auf folgende Weise definiert: $\omega_0^0(f, P) = \omega_0(f, P)$, $\omega_0^{\alpha+1}(f, P) = \omega_0(\omega_0^\alpha, P)$ bzw., wenn α Limeszahl ist, $\omega_0^\alpha(f, P) = \inf_{\alpha' < \alpha} \omega_0^{\alpha'}(f, P)$. Es wird bewiesen, daß es eine Ordnungszahl $\bar{\alpha} < \Omega$ mit $\omega_0^{\bar{\alpha}+1}(f, P) \equiv \omega_0^{\bar{\alpha}}(f, P)$ gibt; die Funktion $\omega_0^{\bar{\alpha}}(f, P)$ wird Reoszillation von $f(P)$ genannt, und es wird gezeigt, daß jede $\alpha < \Omega$ wirklich als kleinste Ordnungszahl solcher Art auftreten kann.
Császár (Budapest).

Fort jr., M. K.: A unified theory of semi-continuity. Duke math. J. 16, 237—246 (1949).

Verf. gibt eine allgemeine Theorie der halbstetigen Funktionen, die die klassische Theorie (bezüglich reeller Funktionen), die von unten halbstetigen Zerlegungen von Moore [Trans. Amer. math. Soc. 27, 416—428 (1925)], gewisse Ergebnisse von Wilson [Amer. J. Math. 48, 147—168 (1926)] mit umfaßt. Wenn man die erhaltenen Resultate auf reelle Funktionen spezialisiert, bekommt man u. a. folgende bekannten Sätze: Die Stetigkeitsstellen einer halbstetigen Funktion bilden eine G_δ Residual-Menge. Eine monoton fallende Folge von oben halbstetiger Funktionen konvergiert gegen eine halbstetige Funktion; wenn die Grenzfunktion stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig. Die Menge x , für die $f(x) \geq g(x)$ gilt, ist abgeschlossen, wenn $f(x)$ von oben, $g(x)$ von unten halbstetig ist. Die allgemeine Theorie ist auf den Begriff der Stetigkeitsstruktur (continuity structure) gegründet, die folgendermaßen definiert ist: Es seien: M ein Raum mit der Metrik $\varrho(X, Y)$, P die Menge der positiven Zahlen, \circ bedeute \leq oder \geq , F bezeichne eine Abbildung von $P \times M$ in eine durch \simeq partiell geordnete Menge (\sim ist reflexiv und transitiv). (\circ, F, \sim) ist eine Stetigkeitsstruktur für M , wenn für alle $h, k \in P$, $X, Y \in M$ aus $h \circ k$, $\varrho(X, Y) < |h - k|$ folgt, daß $F(h, X) \sim F(k, Y)$. $f: A \rightarrow M$ wird in x (\circ, F, \sim) -stetig genannt, wenn es für gegebene $h \circ k$ ein $V \ni x$ gibt, so daß $F(h, f(x)) \sim F(k, f(y))$ für alle $y \in V$. [Gewöhnliche Stetigkeit ist $(>, F, \supset)$ -Stetigkeit, wenn

$$F(h, X) = \{Y \in M | \varrho(X, Y) < h\};$$

$(>, +, \geq)$ -Stetigkeit ist Halbstetigkeit von oben von reellen Funktionen, wenn $F(h, X) = h + X$.] Die allgemeine Theorie wird dann auf diesen Begriffen aufgebaut.

Fáry (Paris).

Levi, Beppo: Betrachtungen über die Funktionaldeterminante. Math. Notae, Bol. Inst. Mat., Rosario 8, 97—102 (1948) [Spanisch].

Verf. betrachtet Abbildungen eines beschränkten abgeschlossenen Bereiches D des n -dimensionalen Raumes der (x_1, \dots, x_n) in einen ebensolchen Bereich D' des Raumes der (y_1, \dots, y_n) durch die im Stolzischen Sinne differenzierbaren Funktionen $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Es wird gezeigt: Die Punkte im Innern von D , in welchen die Funktionaldeterminante verschwindet und deren Bildpunkte auf der Begrenzung von D' liegen, bilden, sofern solche vorhanden, eine in sich dichte Menge M . Setzt man etwas mehr voraus, nämlich, daß die Funktionen f_i in D stetig differenzierbar sind, so ist M perfekt. Aus diesem Ergebnis, wie allgemein aus jedem Satz über die Funktionaldeterminante, lassen sich auch Aussagen über weniger als n Funktionen von n Veränderlichen gewinnen, indem man solche Funktionen in geeigneter Weise durch spezielle Funktionen zu einem vollen System von n Funktionen ergänzt.

Aumann (Würzburg).

Császár, Akos: Sur les fonctions internes, non monotones. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 13, 48—50 (1949).

Verf. nennt eine Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b) intern, wenn

$$\min(f(x), f(y)) \leq f(\tfrac{1}{2}(x + y)) \leq \max(f(x), f(y))$$

für $a < x < y < b$ mit Gleichheitszeichen nur im Falle $f(x) = f(y)$. In Analogie

und engem Zusammenhang mit den nicht linearen Lösungen der Funktionalgleichung $F(x+y) = F(x) + F(y)$ sind auch die nicht monotonen internen Funktionen hochgradig unstetig. Es wird der Satz bewiesen: Ist $f(x)$ in (a, b) intern und nicht monoton, so ist f auf keiner Teilmenge positiven Maßes von (a, b) meßbar [und in keinem Punkt von (a, b) approximativ stetig].

Aumann (Würzburg).

Fenyő, Stefan: Über den Mischalgorithmus der Mittelwerte. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 13, 36—42 (1949).

Verf. betrachtet symmetrische, in allen Argumenten stetige und streng monotone Mittelwerte $M(x_1, \dots, x_n)$ mit $\min(x_1, \dots, x_n) \leq M(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n)$, ferner zu n solchen Mittelwerten M_1, \dots, M_n den Mischalgorithmus

$$x_i^{(k+1)} = M_i(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (i = 1, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots),$$

welcher gegen einen Mittelwert $M(x_1, \dots, x_n)$ konvergiert, und stellt die Frage, wann das Ergebnis des Mischprozesses ein quasarithmetisches Mittel ist, d. h. die

Form $\Phi^{-1}\left(\frac{\Phi(x_1) + \dots + \Phi(x_n)}{n}\right)$ hat mit stetigem und monotonem Φ . Unter Voraussetzung zweimalig stetiger Differenzierbarkeit der M_1, \dots, M_n gilt mit der Abkürzung

$$E(x) = \exp\left\{-n \int \left[\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1 \partial x_2}(t, \dots, t) + \dots + \frac{\partial^2 M_n}{\partial x_1 \partial x_2}(t, \dots, t) \right] dt\right\}$$

der Satz: Das zu M_1, \dots, M_n gehörige Mischmittel M ist dann und nur dann quasarithmetisch, wenn identisch in x_1, \dots, x_n die Gleichungen bestehen:

$$E(M_1) \frac{\partial M_1}{\partial x_i} + \dots + E(M_n) \frac{\partial M_n}{\partial x_i} = E(x_i), \quad i = 1, \dots, n;$$

dabei ist $E(x)$ die Ableitung von $\Phi(x)$. Für verschiedene Vorkommnisse werden mehrere Beispiele gegeben.

Aumann (Würzburg).

Allgemeine Reihenlehre:

● Markušević, A. I.: Reihen. Elementare Skizze. — 2. Aufl. Leningrad und Moskau: Staatsverlag für techn. theor. Lit. 1947. 156 S., 3,— Rubel [Russisch].

Eine elementare Einführung in die Lehre von den unendlichen Reihen, die an Vorkenntnissen nicht viel mehr voraussetzt, als auf der Mittelstufe der höheren Schule gelernt zu werden pflegt. Die Grundbegriffe „Konvergenz“, „Divergenz“ usw. werden erst an zahlreichen numerischen Beispielen anschaulich erläutert, ehe sie begrifflich einigermaßen präzisiert werden. Behandelt wird ferner, sehr breit und ausführlich, die binomische Reihe, sodann die Reihe für Sinus und Kosinus, schließlich, unabhängig davon, die Exponentialreihe und die Reihe für $\log(1+x)$.

W. Hahn (Berlin).

Cooke, Richard G. and A. Mary Barnett: The „right“ value for the generalized limit of a bounded divergent sequence. J. London math. Soc. 23, 211—221 (1949).

Verf. zeigen zunächst, daß es bei beschränkten Folgen für die Untersuchung der Leistungsfähigkeit von T -Matrizen genügt, lediglich aus den Zahlen 0 und 1 gebildete Folgen heranzuziehen. Sie beweisen nämlich: dafür, daß eine reelle beschränkte Folge $\{z_k\}$ mit einer endlichen Anzahl N von Häufungspunkten l_1, l_2, \dots, l_N durch eine T -Matrix A limitierbar ist, ist die Bedingung hinreichend, daß jede von N speziellen Folgen, die mit den Werten 0 und 1 aus der gegebenen Folge $\{z_k\}$ in geeigneter Weise hervorgehen, A -limitierbar ist. — Das Bildungsgesetz dieser N speziellen Folgen ist dabei dieses: zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ nehme man aus der gegebenen Folge $\{z_k\}$ die Teilfolge $\{z_{r_p(k)}\}$, die aus allen im Intervall $(l_p - \varepsilon, l_p + \varepsilon)$ liegenden z_k besteht, wobei ε so klein zu wählen ist, daß sich die Intervalle für $p = 1, 2, \dots, N$ nicht überlappen, und dann setze man 1 an allen Stellen mit dem Stellenzeiger $r_p(k)$, sonst aber 0 ein. — Verf. beweisen ferner die von Henstock herrührende, den Fall unendlich vieler Häufungspunkte nunmehr umfassende Verallgemeinerung des obigen Satzes: Es sei $A = (a_{n,k})$ eine reelle T -Matrix, $\{z_k\}$ eine reelle beschränkte Folge, etwa $|z_k| < B$ für alle k , ferner $\{x(k)\}$ ($k = 1, 2, \dots$)

die Teilfolge der natürlichen Zahlen, für die die $z_{r(k)} \leq x$ gilt, und endlich $g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n, r(k)}$.

Dafür, daß die reelle beschränkte Folge $\{z_k\}$ A -limitierbar ist, ist die Bedingung hinreichend,

daß die Folge $g_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ und alle x in $(-B, B)$ einen Grenzwert $g(x)$ besitzt, und es ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} z_k = \int_{-B}^B x dg(x).$$

Beide Sätze gelten auch für komplexe beschränkte divergente Zahlenfolgen $\{z_k\}$. — Im weiteren Verlaufe stellen Verf. den Zusammenhang ihrer Ergebnisse mit den Untersuchungen J. D. Hills her [Summability of sequences of 0's and 1's, Ann. Math., Princeton, II. S. 46, 556—562 (1945)], indem sie den folgenden Satz beweisen: Fast alle Folgen von X sind durch eine reelle T -Matrix A , welche die Borelsche Eigenschaft besitzt, zum „echten“ Wert $1/2 = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)$ A -limitierbar.

— Dabei bedeutet X die Menge aller mit den Gliedern 0 und 1 gebildeten divergenten Folgen, der Ausdruck „fast alle Folgen von X “ bezeichnet eine Teilmenge von X , für welche die durch dyadische Brüche zugeordnete Teilmenge des Intervalls $0 < y < 1$ das Lebesguesche Maß 1 besitzt. Die reelle T -Matrix A hat die Borelsche Eigenschaft, bedeutet: fast alle Folgen von X sind zum Wert $1/2$ A -limitierbar. Unter dem „echten“ Wert für den verallgemeinerten Grenzwert (falls vorhanden) der Folge $\{z_k\}$ vermöge einer T -Matrix $A = (a_{n,k})$ verstehen Verf. den

Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$ für $z \rightarrow 1$ entlang der reellen Achse [$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z_n - z_{n-1}) z^n$, $z_{-1} = 0$],

wenn dieser Grenzwert vorhanden ist; anderenfalls gibt es keinen „echten“ Wert. Der „echte“ Wert ist also der Abelsche Grenzwert der Folge. — Über den Vergleich der Leistungsfähigkeit zweier T -Matrizen A und B beweisen Verf. den Satz: 1. B besitze eine eindeutige vordere Reziproke ^{-1}B , 2. $A \cdot ^{-1}B$ stelle eine T -Matrix dar, 3. $A \cdot ^{-1}BB$ sei assoziativ. Aus $B(z_n) \rightarrow \sigma$ folgt dann $A(z_n) \rightarrow \sigma$ für $n \rightarrow \infty$, wenn entweder a) die Folge $\{z_n\}$ beschränkt ist, oder b) B oder $A \cdot ^{-1}B$ zeilenfinit ist. — Dieser Satz wird auf den Fall $B = (C, r)$ ($r > 0$) angewandt

und führt so zu dem Ergebnis, daß jede T -Matrix A , für die $\sum_{k=1}^{\infty} k |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leq M$ für jedes $n \geq 1$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_{n,k} - 2a_{n,k+1} + a_{n,k+2}| \leq M$ für jedes $n \geq 1$ gilt, die Borelsche Eigenschaft besitzt und daher fast alle Folgen von X zum „echten“ Wert limitiert. Garten (Tübingen).

Kuttner, B.: A theorem on Hölder means. J. London math. Soc. 23, 315—320 (1949).

L. S. Bosanquet hat gezeigt [Note on Hölder means, J. London math. Soc. 21, 11—15 (1946)], daß es Reihen gibt, deren Höldersche Mittel (H, k) für jedes ganze $k \geq 2$ eigentlich divergieren, und daß deren Abelsche Mittel zwar existieren, aber nicht eigentlich divergent sind. Verf. zeigt, daß dies auch für die von Hausdorff definierten Hölderschen Mittelbildungen

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (-1)^{n-v} [\Delta^{n-v} (v+1)^{-k}] s_v$$

der Folge s_n von beliebiger Ordnung k gilt, und zwar für jedes $k > 1$. Karamata.

Salechov, G. S.: Zur Theorie der Berechnung von Reihen. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 4 (32), 50—82 (1949) [Russisch].

Es wird eine systematische Übersicht der Vergleichskriterien (zweiter Art) für Reihen mit positiven Gliedern gegeben, insbesondere derjenigen von D'Alembert, Kummer, Gauß, Raab, Cauchy (Integralkriterium) usw. Nach der Art des Kriteriums wird die Schnelligkeit der Konvergenz bzw. die Restabschätzung betrachtet, wie auch entsprechend die Reihe, durch die Kummersche Transformation, in eine schneller konvergierende Reihe umgewandelt. Diese Betrachtungen werden durch Tabellen und Beispiele ergänzt. Karamata (Zemun).

Wintner, Aurel: On the Tauberian nature of Ikehara's theorem. Amer. J. Math. 69, 99—103 (1947).

Verf. zeigt, daß man eine Folge a_n derart angeben kann, daß die Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ für $R\{s\} > 1$ absolut konvergiert und eine stetige Grenzfunktion auf der Geraden $R\{s\} = 1$ besitzt, daß aber $\frac{1}{x} \sum_{n=1}^x a_n$ bei $x \rightarrow \infty$

keinem Grenzwerte zustrebt. Daraus ist ersichtlich, daß beim Ikeharaschen Satze (nach welchem $\sum_{n=1}^x a_n = o(x)$ ist, falls $a_n > O(1)$ und $f(s)$ den genannten Bedingungen Genüge leistet) die Taubersehe Bedingung $a_n > O(1)$ nicht entbehrt werden kann.

Karamata (Zemun).

Meyer-König, W.: Die E_p - und S_α -Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze. Math. Z., Berlin 52, 344—354 (1949).

Als Ergänzung einiger Sätze des Ref. „Über die B -Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande“ [Math. Z., Berlin 44, 156—160 (1939), dies. Zbl. 19, 113] gibt Verf. die entsprechenden Sätze für die (E, p) -Limitierbarkeit

$$E_p(n; s_p) = 2^{-pn} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (2^p - 1)^{n-v} s_p, \quad p > 0,$$

und die von ihm eingeführte (S, α) -Limitierbarkeit

$$S_\alpha(n; s_p) = (1 - \alpha)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} \alpha^v s_p, \quad 0 < \alpha < 1,$$

wobei sich das B -Verfahren einerseits als Grenzfall des (E, p) -Verfahrens, bei $p \rightarrow \infty$, andererseits des (S, α) -Verfahrens, bei $\alpha \rightarrow 0$, auffassen läßt. — Wird $f(z) = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ gesetzt, indem die Konvergenz für $|z| < 1$ vorausgesetzt wird, und mit $f(a)$, $a \neq 1$, das abgeschlossene Kreisgebiet $|z - a| \leq |1 - a|$ bezeichnet, so beweist Verf. u. a. die folgenden Sätze: Strebt $(1 - z)^k f(z) \rightarrow A$ für $z \rightarrow 1$ in $f\left(\frac{2^{p+1}-1}{2^p-1}\right)$, so ist

$$(1) \quad E_p(n; s_p) \sim \frac{A n^k}{2^{pk} \Gamma(k+1)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

für $p > 0$ und $k > 0$; für $k = 0$ ist die Folge

$$C_k(n; s_p) = \sigma_k(n; s_p) \left/ \binom{n+k}{n} \right. \text{ mit } \sigma_k(n; s_p) = \sum_{v=0}^n \binom{n-v+k-1}{n-v} s_p$$

durch das (E, p) -Verfahren limitierbar zum Werte A . — Entsprechende Sätze gelten für das (S, α) -Verfahren, falls man die Kreisscheibe $f\left(\frac{2^p-1}{2^{p+1}-1}\right)$ durch $f\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)$

und die Konstante $1/2^{pk}$ in (1) durch $\binom{\alpha}{1-\alpha}^k$ ersetzt. Karamata (Zemun).

Pastidès, N.: Sur les séries entières à rayon de convergence nul. Bull. Sci. math., II. S. 72_I, 107—115 (1948).

Es seien S, T, U, \dots Potenzreihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ mit den (möglicherweise verschwindenden) Konvergenzradien $R[S], R[T], R[U], \dots$, und es bedeute $S = T$ gliedweise Übereinstimmung der Reihen S und T . Unter ST sei diejenige Potenzreihe verstanden, die man erhält, wenn man in der Reihe für S statt x die Reihe T einführt, formal ausmultipliziert und wieder nach Potenzen von x zusammenordnet. Dann ist $S(TU) = (ST)U$ (was nur dann von vornherein selbstverständlich ist, wenn $R[S], R[T]$ und $R[U]$ nicht verschwinden). Verschwindet in der Reihe für S der Koeffizient von x nicht, so sind die Reihen S^{-1} und S_{-1} eindeutig bestimmt durch die Gleichungen $SS^{-1} = x$ und $S_{-1}S = x$; es ist dann $S^{-1} = S_{-1}$. Weiter beweist Verf. (elementar) die folgenden Sätze, bei denen die beteiligten Potenzreihen als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt werden. (I) Ist $R[S] = 0$, $R[T] > 0$, so ist $R[ST] = 0$. (II) Ist $R[S] = 0$, so ist $R[S^{-1}] = 0$. (III) Ist

$R[S] > 0$, $R[T] = 0$, so ist $R[ST] = 0$. (IV) Ist $R[S] = R[T] = 0$, so kann $R[ST]$ verschwinden oder von 0 verschieden sein. Meyer-König (Stuttgart).

Bremekamp, H.: Über das Sinusprodukt von Euler. Simon Stevin, wis. naturk. Tijdschr. 26, 203—213 (1948/49) [Holländisch].

L'A. expose trois démonstrations simples de la formule $\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$:

la première, qui est élémentaire, reprend l'idée originale d'Euler, la deuxième est due à Courant et repose sur le développement en série de Fourier de $\cos \mu x$, la troisième utilise la théorie des fonctions analytiques. Horváth (Paris).

Lane, R. E. and H. S. Wall: Continued fractions with absolutely convergent even and odd parts. Trans. Amer. math. Soc. 67, 368—380 (1949).

Verff. betrachten den Kettenbruch $1/1 + c_1/1 + c_2/1 + \dots$, wo $c_p \neq 0$, und nehmen an, daß die beiden kontrahierten Kettenbrüche, deren Näherungsbrüche die Näherungsbrüche gerader bzw. ungerader Ordnung des ursprünglichen sind, absolut konvergieren, d. h. daß die äquivalenten Reihen das tun. Gefragt wird, unter welchen zusätzlichen Bedingungen für die c_p beide einander gleich sind, so daß auch der ursprüngliche Kettenbruch konvergiert. Als notwendig und hinreichend ergibt sich die Divergenz der Reihe $\sum h_p$, wobei h_p definiert wird durch die Formel

$$1 + c_1/1 + \dots + c_{p-1}/1 + c_p h_p/1 = 0.$$

Augenscheinlich ist $h_p = -B_p(c_p B_{p-1})^{-1}$, wo die B_p die Näherungsnenner des ursprünglichen Kettenbruches sind, definiert durch die Formeln $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_{p+1} = B_p + c_p B_{p-1}$. Indem dann auf die kontrahierten Kettenbrüche bekannte Kriterien angewandt werden, ergeben sich einige teils alte, teils neue Kriterien.

Perron (München).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Karlin, Samuel: Orthogonal properties of independent functions. Trans. Amer. math. Soc. 66, 44—46 (1949).

Due funzioni $f_1(t)$, $f_2(t)$ definite in $(0, 1)$ e ivi misurabili si chiamano indipendenti nel senso di Steinhaus se per qualsiasi coppia di costanti (α_i, β_i) , $(i = 1, 2)$ si ha

$$\text{mis}_t [\alpha_1 < f_1(t) \leq \beta_1, \alpha_2 < f_2(t) \leq \beta_2] = \text{mis}_t [\alpha_1 < f_1(t) \leq \beta_1] \text{mis}_t [\alpha_2 < f_2(t) \leq \beta_2].$$

Se $\{x_n(t)\}$ è una successione di funzioni due a due indipendenti, $(1) \int_0^1 x_n(t) dt = 0$,

$(n = 1, 2, \dots)$, $\{a_n\}$ una successione di costanti, $s_n(t) = \sum_{l=1}^n a_l x_l(t)$, e p e p' due numeri positivi tali che $1/p + 1/p' = 1$, l'A. servendosi anche di un lemma di Marcinkiewicz e Zygmund [questo Zbl. 18, 75] dimostra che ognuna delle seguenti condizioni

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 s_m(t) g(t) dt$ esiste finito per ogni $g(t) \in L^{p'}$,

(b) $s_n(t)$ per $n \rightarrow \infty$ converge quasi ovunque in $(0, 1)$ verso una funzione $s(t) \in L^p$,

(c) $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_0^1 |s_m(t) - s_n(t)|^p dt = 0$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mis}_t [|s_n(t) - s(t)| \geq \varepsilon > 0] = 0$ per $\varepsilon > 0$ e arbitrario, ed $s(t) \in L^p$,

implica le altre tre. — Successivamente l'A. confronta le somme di Toeplitz e la somma ordinaria delle serie $\sum_{l=1}^{\infty} a_l x_l(t)$ convergenti quasi ovunque verso una

funktion L^p , e infine supposto che insieme alla (1) si abbia $\int_0^1 x_n^2(t) dt = 1$ ($n=1, 2, \dots$), l'A. dimostra che condizione necessaria e sufficiente perché data una qualunque successione $\{a_n\}$ per la quale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ risulti anche per un $p > 2$

$$\lim_{n,m} \int_0^1 \left| \sum_{l=n}^m a_l x_l(t) \right|^p dt = 0$$

è che esista una costante γ tale che $\int_0^1 |x_n(t)|^p dt \leq \gamma$ ($n=1, 2, \dots$). Sansone.

Petersson, Hans: Über Interpolation durch Lösungen linearer Differentialgleichungen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16_{3/4}, 41—55 (1949).

In der vorliegenden Note, welche E. Artin zum 50. Geburtstag gewidmet ist, verallgemeinert Verf. die Interpolation vorgegebener Funktionen in der Weise, daß er statt Polynomen die Lösungen linearer Differentialgleichungen heranzieht. — J bedeute auf der Zahlengeraden der reellen Veränderlichen x ein offenes Intervall $a < x < b$, wobei auch $a = -\infty$ und $b = +\infty$

zugelassen werden. $L_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} + y^{(n)}$ (1) heißt ein auf J reell-analytischer

Differentialausdruck n -ter Ordnung (mit dem höchsten Koeffizienten 1), wenn jede der reellen Funktionen $a_k(x)$ in einer Umgebung jeder Stelle x_0 von J in eine Potenzreihe nach $x - x_0$ entwickelt werden kann. Es soll gesagt werden, daß eine in J n -mal differenzierbare Funktion $f(x)$ an der Stelle $\alpha \in J$ eine mindestens m -fache Nullstelle besitzt, wenn

$$f(x) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad 1 \leq m \leq n+1$$

ist. — Verf. beweist zunächst folgende Verallgemeinerung des Rolleschen Theorems: Ist $f(x)$ eine in J n -mal differenzierbare Funktion und hat dort $f(x)$ (mindestens) $n+1$ Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen nach ihrer Mindestvielfachheit zu zählen sind, so besitzt jeder auf J reell-analytische Differentialausdruck (1) für $y = f(x)$, also $L_n(x, f(x))$, eine Nullstelle ξ in dem abgeschlossenen Intervall, das die kleinste und größte der Nullstellen von $f(x)$ zu Endpunkten hat. — Es seien p_j , $1 \leq j \leq r$, natürliche Zahlen, deren Summe gleich n ist. Dann lassen sich die r Stellen $\alpha_j \in J$ unabhängig von den Konstanten $A_j^{(k)}$ so wählen, daß es eine und nur eine Lösung $y = \varphi(x)$ der zu dem auf J reell-analytischen Differentialausdruck (1) gehörigen Differentialgleichung $L_n(x, y) = 0$ (2) gibt, welche den Bedingungen

$$(3) \quad \varphi^{(k)}(\alpha_j) = A_j^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq p_j - 1, \quad 1 \leq j \leq r,$$

genügt. Ist nun $f(x)$ eine auf J n -mal differenzierbare Funktion, so approximiert sie Verf. durch diejenige Lösung $q(x)$ von (2), für welche in (3) $A_j^{(k)} = f^{(k)}(\alpha_j)$ ist, und zeigt mit Hilfe des verallgemeinerten Rolleschen Theorems, daß (4) $\hat{f}(x) - q(x) = (1/n!) L_n(\xi, \hat{f}(\xi)) h(x)$, $x \in J$ gilt, wobei $h(x)$ eindeutig durch (5) $L_n(x, h(x)) = n!$, $h^{(k)}(\alpha_j) = 0$ festgelegt wird und ξ in das kleinste abgeschlossene Intervall fällt, welches x und die r Stellen α_j enthält. Ist speziell

$$L_n(x, y) = y^{(n)}, \quad \text{so wird } q(x) \text{ ein Polynom, dessen Grad } \leq n-1 \text{ und } h(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{p_j}.$$

Dabei geht (4) in eine bekannte klassische Interpolationsformel über. — Hierauf erörtert Verf. den Fall $r=1$ und gibt folgende Verallgemeinerung der Taylorschen Formel. Es sei $\{b_\nu(x)\}$

($\nu=0, 1, 2, \dots$) eine Folge auf J reell-analytischer Funktionen, $\omega_m(x) = m! \exp\left(-\int_{\alpha}^x b_m(t) dt\right)$; $m \geq 0$; $\langle \alpha, x \rangle \subset J$, und die Funktionen $u_\nu(x)$ seien durch

$$L_\nu(x, u_\nu(x)) = \omega_\nu(x), \quad u_\nu^{(k)}(\alpha) = 0, \quad 0 \leq k \leq \nu-1, \quad \nu=1, 2, \dots,$$

erklärt, wobei $L_1^{[m]}(x, y) = b_m(x) y + y'$; $m=0, 1, 2, \dots$, $L_1(x, y) = L_1^{[0]}(x, y)$ und $L_{\nu+1}(x, y) = L_1^{[\nu]}(x, L_\nu(x, y))$ für $\nu \geq 1$ ist. Für eine n -mal auf J differenzierbare Funktion $f(x)$ lautet dann das Analogon zur Taylorschen Formel

$$(6) \quad f(x) = f(\alpha) \omega_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu!} L_\nu(\alpha, f(\alpha)) u_\nu(x) + \frac{1}{n!} L_n(\xi, \hat{f}(\xi)) h_n(x),$$

$h_n(x)$ wird nach (5) durch $L_n(x, h_n(x)) = n!$, $h_n^{(k)}(\alpha) = 0$; $0 \leq k \leq n-1$ gegeben und ξ liegt in dem abgeschlossenen Intervalle, dessen Endpunkte x und α sind. Verschwinden sämtliche $b_m(x)$ auf J identisch, so geht (6) in die klassische Taylorsche Formel über. — Wegen einer weiteren Verallgemeinerung von (6) muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. — Anschließend

betrachtet Verf. im Komplexen insbesondere das Analogon zu (6). Die Funktionen der Folge $\{b_m(z)\}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) seien auf der Kreisscheibe $U_0: |z - \alpha| < \varrho_0$ regulär und $L_{\nu+1}(z, w)$, $u_\nu(z)$ und $\omega_m(z)$ analog wie im Reellen erklärt. Ferner werde $L_0(z, w) = w$ und $\omega_0(z) = u_0(z)$ gesetzt. Es gilt dann folgende Aussage: Die gleichmäßige Konvergenz von (7) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} L_\nu(\alpha, f(\alpha)) u_\nu(z)$

auf $z \in U_1: |z - \alpha| < \varrho_1$ ($0 < \varrho_1 < \varrho_0$) ist notwendig und hinreichend dafür, daß sich $f(z)$ in eine auf U_1 gleichmäßig konvergente Reihe von der Gestalt $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu u_\nu(z)$, γ_ν konstant,

entwickeln läßt. Es ist dann $\gamma_\nu = (1/\nu!) L_\nu(\alpha, f(\alpha))$. Für die gleichmäßig absolute Konvergenz der Reihe (7) in einer Umgebung von $z = \alpha$ wird folgende hinreichende Bedingung angegeben: Die Funktionen der Folge $\{b_m(z)\}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) und $f(z)$ seien auf der Kreisscheibe $|z - \alpha| < \varrho_0$ regulär-analytisch, ferner die Funktionenfolge $\{b_m(z)\}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) auf $|z - \alpha| \leq \varrho$, ($0 < \varrho < \min(1, \varrho_0)$) außerdem gleichmäßig beschränkt. Es soll also insbesondere eine von z und m unabhängige Schranke $M \geq 1/(1 - \varrho)$ so geben, daß $|b_m(z)| < M$ für jedes m gilt, wenn $|z - \alpha| \leq \varrho$ ist. Die Reihe (7) konvergiert dann gleichmäßig absolut auf $|z - \alpha| \leq R$, wenn $R < \varrho/M(\varrho + 1)$ ist. — Abschließend weist Verf. auf die Bedeutung hin, welche seine Ergebnisse für die Linearisierung gewöhnlicher Differentialgleichungen haben, und zeigt, wie man zu einer Abschätzung für die Differenz der Lösungen der ursprünglichen und der linearisierten Gleichung gelangen kann.

Lammel (Tutzing).

Berman, D. L.: Die Divergenz des Interpolationsprozesses von S. N. Bernštejn.

Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 181—184 (1950) [Russisch].

Es sei (x_{ik}) ($i, k = 1, 2, \dots; i \leq k$) eine Dreiecksmatrix, und zwar sei $-1 \leq x_{1n} < x_{2n} < \dots < x_{nn} \leq +1$. $f(x)$ sei in $[-1, +1]$ erklärt und stetig; mit $L_n(f, x)$ sei das zur n -ten Zeile der Matrix gehörende Lagrangesche Interpolationspolynom bezeichnet. S. Bernstein hat gezeigt, daß es keine solche Matrix derart gibt, daß für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ die Folge $L_n(f, x)$ gleichmäßig bezüglich x gegen $f(x)$ konvergiert. Er hat ferner einen dem Lagrangeschen ähnlichen Interpolationsprozeß konstruiert, der die Eigenschaft besitzt, daß für die Tschebyscheffsche Matrix mit $x_{in} = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi$ die entsprechend $L_n(f, x)$ gebildeten Interpolationspolynome $A_n(f, x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ gehen. Verf. zeigt nun, daß der Bernsteinsche Prozeß für die Matrix mit

$$x_{i,2n+1} = -1 + \frac{i-1}{n}; \quad x_{i,2n+1} = -1 + \frac{2(i-1)}{2n+1}$$

und die Funktion $f(x) \equiv x$ für alle von Null verschiedenen x im Intervall $(-1, +1)$ divergiert. Er benutzt beim Beweis die Darstellung der Bernsteinschen Polynome $A_n(f, x)$ durch die Lagrangeschen; diese können nach unten abgeschätzt werden.

W. Hahn (Berlin).

Zuchovickij, S. I. und M. G. Krejn: Bemerkung über eine mögliche Verallgemeinerung der Sätze von A. Haar und A. N. Kolmogorov. Uspechi mat. Nauk **5**, Nr. 1 (35), 217—229 (1950) [Russisch].

Im Anschluß an Kolmogoroff (dies. Zbl. **30**, 28), der die Tschebyscheffsche „Minimax“-Theorie auf gewöhnliche komplexe Funktionen ausgedehnt hat, übertragen die Verf. die Begriffe „Annäherung durch Polynome“, „beste Annäherung“, „Tschebyscheffsches System“ und die hierfür gültigen Sätze auf mehrdimensionale Vektorfunktionen sowie auf hyperkomplexe Funktionen. Ist z. B. e_1, \dots, e_s eine Vektorbasis des betrachteten Raumes und bezeichnen $f_i^j(q)$ komplexe Funktionen von q , so kann man eine Basis $F_i(q) = \sum_{\lambda=1}^s f_i^\lambda(q) e_\lambda$ ($i = 1, 2, \dots, N$) von Vektorfunktionen erklären, mit ihnen „Polynome“ $P(q) = \sum_{i=1}^N \alpha_i F_i(q)$ (α_i komplexe Zahlen) bilden und durch diese eine beliebige Vektorfunktion $\Phi(q)$ annähern. Die „beste“ Annäherung ist dann der Ausdruck $\min_{\alpha} \max_q |\Phi(q) - P_\alpha(q)|$, wobei α die Variation über alle zulässigen „Polynome“ und q die über alle Punkte des Bereichs des Argu-

ments der komplexen Funktionen anzeigt. Die Basis $F_i(q)$ ist ein Tschebyscheffsches System, wenn das Polynom $\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i(q)$ für beliebige komplexe α_i niemals mehr als $n-1$ Nullstellen hat; man muß dabei $N = n \cdot s$ mit ganzzahligem n setzen. Es gilt dann die Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß eine beliebige Vektorfunktion dann und nur dann eindeutig durch „Polynome“ „bestens approximiert“ werden kann, wenn die Basis der „Polynome“ ein Tschebyscheffsches System bildet. — Die recht einfachen Beweise sind den in der Theorie üblichen nachgebildet.

W. Hahn (Berlin).

Salzer, Herbert E.: **Polynomials for best approximation over semi-infinite and infinite intervals.** Math. Mag., Texas **23**, 59—69 (1949).

Il problema di costruire il polinomio $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, a coefficienti reali, tale che $e^{-x}|P_n(x)|$ abbia minimo il massimo scarto dallo zero in $(0, \infty)$, si riconduce alla risoluzione del sistema trascendente

$$(1) \quad P'_n(x_i) = P_n(x_i), \quad e^{-x_i} P_n(x_i) = (-1)^i a_0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

nelle $2n$ incognite $x_1, \dots, x_n, a_0, \dots, a_{n-1}$. L'A. determina numericamente le soluzioni per $n = 1, 2$; nel caso di $n = 2$ si ottiene il polinomio $P_2(x) = x^2 - 1,62 \dots x + 0,21 \dots$ distinto dal polinomio di Laguerre $x^2 - 4x + 2$. — Lo stesso problema considerato nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ per le funzioni $e^{-x^2}|P_n(x)|$ porta al sistema trascendente di $2n+1$ equazioni in $2n+1$ incognite $x_1, \dots, x_{n+1}, a_0, \dots, a_{n-1}$

$$(2) \quad P'_n(x_i) = 2x_i P_n(x_i), \quad e^{-x_i^2} P_n(x_i) = (-1)^{i-1} e^{-x_1^2} P_n(x_1).$$

L'A. osserva che $P_n(x)$ è pari o dispari secondo che n è pari o dispari, e basta perciò limitarsi al caso di n dispari. Per $n = 3$ si ha $P_3(x) = x^3 - 0,82 \dots x$ distinto dal polinomio di Hermite $x^3 - (3/2)x$. — Il problema della soluzione dei sistemi (1) e (2) per valori di $n > 2$ è da studiare.

Giovanni Sansone (Firenze).

Motzkin, Th.: **Approximation by curves of a unisolvant family.** Bull. Amer. math. Soc. **55**, 789—793 (1949).

Es handelt sich um eine Darstellung der Approximation durch gegebene Funktionen in einer Gestalt, die geometrisch gedeutet und deshalb auch auf geometrische Probleme angewandt werden kann. $y = S(x)$ sei eine stetige n -parametrische Kurvenfamilie derart, daß für n Werte x_i im Intervall $-1 \leq x_i \leq +1$ und beliebige reelle Zahlen y_1, \dots, y_n eine und nur eine Kurve der Familie existiert, für die $S(x_i) = y_i$ ist. Verf. zeigt nun in der bei derartigen Problemen üblichen Weise, daß eine Kurve kleinster Abweichung existiert, für die das Maximum von $|S(x)|$ ($-1 \leq x \leq +1$) ein Minimum ist, und zwar eindeutig, und daß sie dadurch charakterisiert werden kann, daß sie mindestens n -mal das Zeichen wechselt. Das gilt auch, wenn man x auf $n-1$ feste Werte beschränkt, und von hier aus ergibt sich eine Verallgemeinerung: Man betrachtet m Punkte in der Ebene und die Kurven, von denen durch je $n < m$ beliebige Punkte nur eine läuft; an die Stelle des Betrages $|S(x)|$ tritt jetzt der Abstand der Kurve von den festen Punkten. Hahn.

Zamansky, Marc: **Sur l'approximation des fonctions continues périodiques.** C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 460—461 (1949).

Zamansky, Marc: **Sur la série de Fourier et la série conjuguée d'une fonction continue périodique.** C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1687—1689 (1949).

The author presents some further theorems on uniform approximation of a continuous function $f(x)$ by the partial sums $s_n(x)$ of its Fourier series, by Fejér means $\sigma_n(x)$, and by Jackson's sums $J_n(x)$. Among his results we quote the following: For $\sigma_n(x) - f(x) = O(n^{-1})$ uniformly it is necessary and sufficient that the conjugate function $\tilde{f}(x) \in \text{Lip } 1$; for $f - J_{2n} = O(n^{-2})$ the corresponding condition is the existence of the derivative $f'(x) \in \text{Lip } 1$; for $f - s_n = O(q_n)$, where $q_n > 0, q_n \rightarrow 0$ it is necessary and sufficient that $s''_n = O(n^2 q_n)$; $f - s_n = O(n^{-r})$,

$r > 0$, implies $\tilde{f} - \tilde{s}_n = O(n^{-r})$. For $n^{-1} s'_n(x) \rightarrow 0$ and a fixed x it is necessary and sufficient that $s_n(x + \pi/(2n+1)) \rightarrow f(x)$ and for $n^{-1} s''_n(x) \rightarrow 0$ that $s_n(x) \rightarrow f(x)$. For some of the above relations necessary and sufficient conditions in terms of some integrals of Dini's type are given. There is also an estimation of the Fourier coefficients of $f(x)$ by means of the best trigonometric approximation $E_n(f)$ of order n and of the derivatives of the polynomial whose approximation to $f(x)$ is $O(E_n)$.
G. G. Lorentz (Toronto).

Olovjanišnikov, V. M.: Abschätzung des Restes bei Annäherung stetiger, periodischer Funktionen durch Polynome, die auf einem gegebenen Punktsystem die besten sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 761—764 (1950) [Russisch].

Ist $KW^{(r)}$ die Klasse der Funktionen mit der Periode 2π , die eine absolut stetige $(r-1)$ -te und fast überall eine durch K beschränkte r -te Ableitung haben, und bezeichnet man mit $E_{T_n}(KW^{(r)}, x)$, wie üblich, die obere Grenze der Annäherung durch trigonometrische Polynome $(n-1)$ -ter Ordnung, die für das Punktsystem $x_k = k\pi/n$ die günstigsten sind, so gilt:

$$E_{T_n}(KW^{(r)}, x) = \frac{8K}{\pi^2 n^r} |\sin nx| \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{v(r-1)}}{(2v+1)^{r+1}} \log n + O(1/n^r).$$

Verf. beweist diesen Satz und einen ähnlichen im Anschluß an Überlegungen von Nikolskij (s. dies. Zbl. **25**, 255, 256).
W. Hahn (Berlin).

Rios, Sixto: Einführung in die Theorie der Fourierreihen. Rev. Acad. Ci. exact. fisic. natur. Madrid **42**, 227—243 (1948) [Spanisch].

Dans la 3^{me} Partie de son exposition élémentaire (ce Zbl. **30**, 28, **31**, 349) l'A. traite de l'espace de Hilbert, défini axiomatiquement, et de son interprétation comme espace des fonctions de carré sommable.
Sandro Faedo (Roma).

Pagni, M.: Un'osservazione sui coefficienti di Fourier delle funzioni crescenti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **4**, 672—675 (1948).

Ein klassisches Ergebnis von C. Carathéodory erweiternd, gibt Verf. die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Zahlenfolge die Folge der Fourierkoeffizienten einer im strengen Sinne wachsenden Funktion sei.

Sandro Faedo (Rom).

Timan, A. F.: Über die Lebesgueschen Konstanten für einige Summationsverfahren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 989—992 (1948) [Russisch].

Sei $|\alpha_n| \leq \pi$ eine willkürliche Folge und bezeichne $L_n(\alpha_n)$ die Lebesguesche Konstante des Summierungsverfahrens von S. Bernstein und W. Rogosinski [S. Bernstein, C. r. Acad. Sci., Paris **191**, 976—979 (1930); W. Rogosinski, Math. Ann., Berlin **95**, 110—134 (1925)]:

$$L_n(\alpha_n) = 2\pi^{-1} \int_0^\pi \left| \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} - \frac{\sin(2n+1)(u + \alpha_n/2)}{\sin(u + \alpha_n/2)} \right| du.$$

Verf. beweist, daß für $n \rightarrow \infty$

$$L_n(\alpha_n) = 4\pi^{-2} (1 + |n\alpha_n|) (n^{-1} + |\alpha_n|)^{-|\cos(2n+1)\alpha_n/4|} + O(1).$$

Diese Abschätzung ist in engem Zusammenhang mit einem früheren Resultat des Verf. (dies. Zbl. **29**, 26).
Gál (Paris).

Karamata, J. et M. Tomić: Considérations géométriques relatives aux polynômes et séries trigonométriques. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **2**, 157—174 u. serb. Zusammenfassg. 174—175 (1948).

Ähnliche elementargeometrische Betrachtungen wie in einer Arbeit des zweiten Verf. (dies. Zbl. **33**, 244) führen zu zwei Sätzen von Fejér (dies. Zbl. **15**, 109) und zu anderen Sätzen. Es gelten unter anderem die Sätze: Sind $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$),

$S(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \sin(a_\nu + \beta)x$, wo α und β beliebige reelle Zahlen sind, und ist

$0 < x < \pi$, so besteht die Ungleichung

$$-a_0 \sin^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{x}{2} \leq \sin \frac{\alpha}{2} x \cdot S(x) \leq a_0 \cos^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{x}{2}.$$

Sind $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \dots$), $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$, so gibt es in jedem Intervall $(0, \varepsilon)$

($\varepsilon > 0$) Punkte x , in denen $s(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sin \nu x > 0$ ist. — Sind $a_{\nu-1} \geq a_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$ bzw. $\nu = q+1, q+2, \dots$) und $0 < x < \pi$, so besteht die Ungleichung

$$0 \leq \sum_{\nu=0}^n a_\nu \sin(2\nu+1) \frac{x}{2} \leq a_0 \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$$

bzw.

$$-a_q \sin^2 qx \leq \sin x \cdot \sum_{\nu=q}^n a_\nu \sin(2\nu+1)x \leq a_q \cos^2 qx.$$

— Ist die Koeffizientenfolge $a_q, a_{q+1}, \dots, a_n, 0, 0$ konvex, so hat das trigonometrische Polynom $\sum_{\nu=q}^n a_\nu \cos \nu x$ im Intervall $(0, 2\pi)$ mindestens $2q$ Nullstellen x_k , für welche $(k-1)\pi < qx_k < k\pi$ ($k = 1, 2, \dots, 2q$) sind. *Gy. Sz.-Nagy* (Szeged).

Salem, R. and A. Zygmund: A convexity theorem. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **34**, 443—447 (1948).

Verff. beweisen unter Anwendung einer von G. O. Thorin [An extension of a convexity theorem due to M. Riesz, *Fysiograf. Sällsk. Lund Forhdl.* **8** (1939); *Convexity theorems*, Uppsala 1948] herrührenden Verallgemeinerung des M. Riesz'schen Konvexitätssatzes zunächst den folgenden Satz: $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu z^\nu$ sei für $|z| < 1$ regulär und gehöre der Hardyschen Klasse $H^{1/\alpha}$ ($\alpha > 0$) an, $M(\alpha, \beta)$ bezeichne das Maximum der endlichen komplexen Bilinearform $\sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^n a_{jh} x_j y_h$, wobei die komplexen Veränderlichen x_j, y_h den beiden Bedingungen

$$\sum_0^n |y_h|^{1/\beta} \leq 1 \quad (\beta \geq 0), \quad \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\vartheta})|^{1/\alpha} d\vartheta \leq 1 \quad (\alpha > 0)$$

genügen. Letztere Bedingung soll für jedes r in $0 \leq r < 1$ und für eine jede solche Funktion $f(z)$ gelten, die zur Klasse $H^{1/\alpha}$ gehört und deren $m+1$ erste Entwicklungskoeffizienten die Zahlen x_0, x_1, \dots, x_m sind. Wenn nun der Punkt (α, β) auf der Verbindungsstrecke der Punkte (α_1, β_1) und (α_2, β_2) liegt [$\alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$, $\beta = t\beta_1 + (1-t)\beta_2$, $0 < t < 1$], so gilt die Ungleichung

$$M(\alpha, \beta) \leq C(\alpha_1, \alpha_2) M^t(\alpha_1, \beta_1) M^{1-t}(\alpha_2, \beta_2),$$

und die Konstante $C(\alpha_1, \alpha_2)$ hängt lediglich von α_1 und α_2 ab. Mit Hilfe dieses Satzes gelingt sodann den Verff. ein neuer bequemerer Zugang zu der Littlewood-Paleyschen Ungleichung [*Proc. London math. Soc.* **43**, 105 (1937); dies. Zbl. **16**, 301]:

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p \{\log [n(x) + 2]\} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx,$$

worin $S_n(x)$ die n -te Teilsumme der Fourierschen Reihe von $g(x) \in L^p$ ($1 < p \leq 2$), $n(x)$ eine meßbare, nichtnegative, ganzwertige Funktion, A_p eine von p abhängende Konstante bedeutet.

Garten (Tübingen).

Sheffer, I. M.: Some limit theorems. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 219—231 (1948).

Si danno alcuni teoremi che estendono la nota proposizione che se, per $n \rightarrow \infty$, è $a_n \cos nx + b_n \sin nx \rightarrow 0$ per tutti gli x di un insieme di misura positiva, allora è $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$. Si ottiene il teorema: „Se sono date k successioni di numeri reali o complessi $\{a_{s,n}\}$ ($s = 1, 2, \dots, k$) e le k successioni reali $\{r_{s,n}\}$ tali che nessuna

delle successioni $\{r_{s,n} - r_{p,n}\}$ ($s \neq p$) abbia zero come valore di accumulazione per $n \rightarrow \infty$, allora se per tutti gli x di un insieme di misura positiva è $\sum_{s=1}^k a_{s,n} e^{i r_{s,n} x} \rightarrow 0$, si ha $a_{s,n} \rightarrow 0$ ($s = 1, 2, \dots, k$). Si dimostra inoltre che la condizione relativa alle $\{r_{s,n}\}$ non può essere tolta e si tratta anche il caso più generale in cui alle costanti $a_{s,n}$ si sostituiscano dei polinomi in x .
Sandro Faedo (Roma).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

● Oberhettinger, Fritz und Wilhelm Magnus: Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bd. 55). Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. VII, 126 S. u. 54 Abb., DM 15,60; Ganzleinen DM 18.30.

Es gibt für den praktischen Benutzer elliptischer Funktionen bis heute keine gut brauchbare Anleitung über deren Benützung. Diesem Mangel kommen Verff. durch ihr vorliegendes Buch in dankenswerter Weise entgegen. Der Inhalt gliedert sich in folgende Kapitel: 1. Hilfsmittel. 2. Konforme Abbildung und Greensche Funktion. 3. Anwendung der elliptischen Funktionen auf Probleme der Elektrostatik. 4. Anwendung in Hydro- und Aerodynamik. 5. Vermischte Beispiele. Aus diesem Inhaltsverzeichnis geht hervor, daß fast alles für den Praktiker Wissenswerte im vorliegenden Büchlein behandelt wird. Die Darstellung ist klar bei aller Gedrängtheit und dürfte kaum Schwierigkeiten bieten für den interessierten Leser. Falls noch ein Wunsch geäußert werden dürfte, wäre es der, daß in einer folgenden Auflage die heute verfügbaren Tabellen der elliptischen Integrale dritter Gattung aufgenommen werden könnten.
M. Strutt (Zürich).

Banerjee, Durga Prosad: On the harmonics associated with an ellipsoid and its application to the electrification of two parallel coaxial elliptic discs. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 26, 269—282 (1948).

Verallgemeinerungen der Kugelfunktionen werden durch folgende Lösungen der Potentialgleichung im dreidimensionalen Raum definiert

$$\begin{aligned} Q^n C_n^m(\theta, \varphi) &= \frac{(n+m)!}{2\pi \cdot i^m n!} \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^n \begin{Bmatrix} \cos mu \\ \sin mu \end{Bmatrix} du, \\ Q^{-n-1} F_n^m(\theta, \varphi) &= \frac{(-1)^m n!}{2\pi(n-m)!} \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^{-n-1} \begin{Bmatrix} \cos mu \\ \sin mu \end{Bmatrix} du. \end{aligned}$$

Hierin ist $x = a \varrho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b \varrho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c \varrho \cos \theta$; a, b, c sind feste Konstanten; n, m = ganz, $n \geq |m| \geq 0$. Für die definierten Funktionen werden Rekursionsformeln, Differentialgleichungen, Additionstheoreme und Integraldarstellungen durch Zylinderfunktionen hergeleitet. — Wird im ersten Integral $(z + ix \cos u + iy \sin u)^n$ durch eine Kugelfunktion P_n bzw. Q_n mit dem Argument $(x \cos u + y \sin u + iz)/a$ ersetzt und überdies $c = a$ angenommen, so ergeben sich andere Lösungen der Potentialgleichungen. Sie werden zur Berechnung des Potentials und der Ladungsverteilung zweier paralleler, coaxialer, gleich geladener elliptischer Scheiben verwendet.
J. Meixner (Aachen).

Lord, R. D.: Some integrals involving Hermite polynomials. J. London math. Soc. 24, 101—112 (1949).

Verf. betrachtet unendliche Integrale über Produkte Hermitescher Polynome. Durch Einsetzen der Reihenentwicklungen dieser Polynome erhält er Ausdrücke für diese Integrale. Durch Anwendung eines analogen Verfahrens erhält Verf. Reihenentwicklungen für den m -ten Differentialquotienten eines beliebigen Polynoms nach Produkten Hermitescher Polynome. Diese Ausdrücke wendet Verf. an auf einige Fälle, welche von Titchmarsh behandelt wurden.
M. Strutt (Zürich).

Reuter, G. E. H.: On the boundedness of the Hermite orthogonal system. J. London math. Soc. **24**, 159—160 (1949).

Verf. gibt eine obere Grenze für die Hermiteschen Orthogonalfunktionen beliebiger Ordnung. *M. Strutt* (Zürich).

Mitra, S. C. and A. Sharma: On a generalisation of Weber's parabolic-cylinder functions. Bull. Calcutta math. Soc. **41**, 87—91 (1949).

Die Verff. spalten aus früher von ihnen erhaltenen Ausdrücken für parabolische Zylinderfunktionen die Polynomanteile ab und beweisen für diese Ausdrücke einige Differential- und Rekursionsformeln. Es zeigt sich, daß die betreffenden Differentialgleichungen durch Whittakersche Funktionen gelöst werden, für welche die Verff. bekannte Reihenentwicklungen anschreiben. Als Sonderfälle ergeben sich bekannte Formeln von Goldstein. Durch Anwendung gewisser Differentialoperationen erhalten sie Verallgemeinerungen der Weberschen Funktionen, für welche sie Integraldarstellungen sowie Differentialgleichungen ableiten. *M. Strutt*.

Buchholz, Herbert: Uneigentliche Integrale mit parabolischen Funktionen über einen der beiden Parameter. Math. Z., Berlin **52**, 355—383 (1949).

L'A. partendo dalle espressioni mediante integrali delle somme delle serie

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \alpha + 1)}{\lambda!} h^{\lambda} M_{k_1 + \lambda, \mu_1/2}(t) M_{k_2 + \lambda, \mu_2/2}(\tau),$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \alpha + 1)}{\lambda!} (-h)^{\lambda} W_{-\lambda - (\mu + 1)/2, \mu/2}(s) W_{\lambda + (\mu + 1)/2, \mu/2}(t)$$

dove le $M_{k,m}(z)$, $W_{k,m}(z)$ indicano le funzioni ipergeometriche confluenti di prima e di seconda specie soluzioni dell'equazione $\frac{d^2 W}{dz^2} + \left\{ -\frac{\lambda}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{2} - m^2}{z^2} \right\} W = 0$, in prosecuzione di alcune sue ricerche [Z. angew. Math. Mech. **23**, 47—58, 100—118 (1943)] determina il valore dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma\left(-s + \frac{\mu + 1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{\mu + 1}{2}\right) \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{2s} \cdot \frac{M_{k_1 - (\mu + 1)/2 + s, \mu/2}(-i\xi')}{\Gamma(\lambda + \mu)} \frac{M_{k_2 - (\mu + 1)/2 + s, \mu/2} i \eta'}{\Gamma(\lambda + \mu)} ds$$

e di altri analoghi formati col prodotto di quattro funzioni M , di una M e di una W , o di sole W , dove l'integrazione è relativa al primo parametro di queste funzioni considerato come variabile di integrazione. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Tricomi, Francesco: Sulle funzioni ipergeometriche confluenti. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **26**, 141—175 (1947).

Die Arbeit entwickelt zunächst im wesentlichen bekannte Dinge über die konfluenten hypergeometrischen Funktionen, aber nicht unter Benützung der in der englischen Literatur nach dem Vorgang von Whittaker-Watson weithin (doch nicht ausschließlich) üblich gewordenen Normierung (zu der immerhin der Übergang hergestellt wird), sondern im Anschluß an die Kummersehe Differentialgleichung $x y'' + (c - x) y' - a y = 0$ und ihre Integration durch Potenzreihen und Laplacesche Integrale, ein Aufbau, der trotz des Verziehts auf die bei der anderen Darstellungsweise erzwungene Symmetrisierung (die bei Gleichungen höherer Ordnung kein volles Gegenstück besitzt) Vorteile aufweist. Zu den Literaturangaben in diesem mehr berichtenden Teil sei hinzugefügt: Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Bd. (1939), insbes. Zusatz 16, S. 793—806; Poole, Proc. London math. Soc., II. S. **38**, 542—552 (1935); Ref., J. reine angew. Math. **176**, 250—252 (1937); dies. Zbl. **11**, 24, **15**, 309; Buchholz, Z. angew. Math. Mech. **23**, 47—58, 101—118 (1943) (mit Schriftenverzeichnis). Im einzelnen liefert die Potenzreihenmethode das bekannte bei $x = 0$ reguläre Integral, die Laplacetransformation ein

Fundamentalsystem von Lösungen mit einfacher asymptotischer Entwicklung; die Integraldarstellung des ersten gibt ohne weiteres den Zusammenhang, und man gelangt so (wenn dies auch im Text nicht voll durchgeführt wird) zu erschöpfender Auskunft über das asymptotische Verhalten der ganzen Funktion ${}_1F_1(a, c; x)$ in der Vollumgebung von ∞ . — Es folgen dann Anwendungen auf Sonderfälle, wie Zylinderfunktionen, Fehlerfunktion, Unvollständige Gamma-Funktion, Exponentialintegral. — Nunmehr wird die Laplacetransformation auf die konfluenten Funktionen selbst ausgeübt, und insbesondere zur Herleitung einer neuen Entwicklung von $e^{-h x/a} {}_1F_1(-a, c; x/a)$ nach Besselfunktionen in der Form

$$\Gamma(c) x^{(1-c)/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{\nu}}{a^{\nu}} x^{\nu/2} J_{\nu+c-1}(2\sqrt{x})$$

mit rekurrent bestimmten Polynomen $A_{\nu} = A_{\nu}(a, c, h)$, $h \geq 0$ angewandt; die Richtigkeit der Entwicklung ergibt sich in der Weise, daß (nach Multiplikation mit passenden Faktoren) rechts und links die gleiche Laplace-Unterfunktion hervorgeht. [Für den Fall der Laguerreschen Polynome vgl. Tricomi, Giorn. Ist. Ital. Attuari **12**, 14—33 (1941), insbes. [9]; dies. Zbl. **25**, 402; im Falle $h = 0$ handelt es sich um eine Umordnung einer Entwicklung des Ref., Math. Z. **43**, 533—552 (1938), insbes. 541 (13) (14), 542 (16); Fortschr. d. Math. **64**, 264—265]. Es wird dann die asymptotische Bedeutung der Entwicklung untersucht ($a \rightarrow \infty$ bei $x/a = O(1)$). Für $h = \frac{1}{2}$ erhält man ältere Formeln von Fejer und Perron für die Kummersche Reihe bzw. die Laguerreschen Polynome besonders einfach wieder. — Es folgt ein allgemeiner Satz über die asymptotische Annäherung einer Nullstelle von $f(x, \lambda) = g(x, \lambda) + h(x, \lambda)$ durch eine solche, x_0 , von $g(x, \lambda)$, wo in der Hauptsache vorausgesetzt wird, daß für $\lambda \rightarrow \lambda_0$ $h(x, \lambda) \Rightarrow 0$, während $g(x, \lambda)$ in der Umgebung von x_0 eine Umkehrfunktion besitzt, die gleichmäßig einer Lipschitzbedingung genügt. Mittels dieses Satzes ergeben sich aus den vorangehenden asymptotischen Darstellungen Näherungsformeln für die Nullstellen der Laguerreschen Polynome, die in einer weiteren Arbeit (siehe dies. Zbl. **34**, 324) verschärft werden. Hermann Schmidt.

Toscano, Letterio: Sviluppo in serie della funzione ipergeometrica di Kummer. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 590—597 (1949).

Ausgehend von der hypergeometrischen Funktion mit zwei Veränderlichen $F_2(\alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y)$, entwickelt sowohl nach Potenzen von x und y wie nach Potenzen von x allein, erhält Verf. die konfluente Funktion

$$(1) \quad \psi_1(\alpha; \beta; \gamma, \gamma'; x, y) = e^y \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m) (\beta, m)}{(\gamma, m) m!} {}_1F_1(\gamma' - \alpha - m, \gamma'; -y) x^m,$$

woraus die Entwicklungen

$$(2) \quad \psi_1(\alpha + 1, \beta; \gamma, \alpha + 1; x, -y) = e^{-y} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m)} x^m L_m^{(\alpha)}(y),$$

$$(3) \quad (1-x)^{-\beta} {}_1F_1\left(\beta, \alpha + 1; \frac{-xy}{1-x}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta, m)}{(\alpha + 1, m)} x^m L_m^{(\alpha)}(y), \quad |x| < 1,$$

folgen; $L_m^{(\alpha)}(y)$ bedeuten die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome. Aus (3) ergeben sich für $\beta = \alpha + 1$ bzw. $x \rightarrow x/\beta$, $\beta \rightarrow \infty$ die beiden bekannten erzeugenden Funktionen für die Laguerreschen Polynome

$$(1-x)^{-\alpha-1} e^{-xy/(1-x)} \quad \text{und} \quad e^x (xy)^{-\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{xy}),$$

die nach Doetsch durch eine Laplacesche Transformation ineinander übergeführt werden können. Durch Spezialisieren der Parameter werden ferner aus (3) weitere wichtige Entwicklungen gewonnen, wie z. B. für die Hermiteschen Funktionen zweiter Art und die Funktionen des parabolischen Zylinders von Weber, nach Hermiteschen Polynomen; aus (1) werden für die Hermiteschen Funktionen zweiter Art h_0, h_1 Entwicklungen nach den h_{2m} bzw. h_{2m+1} abgeleitet. Volk (Würzburg).

Shanker, Hari: Some definite integrals involving confluent hypergeometric functions. *J. London math. Soc.* **23**, 44—49 (1948).

Verf. geht von einem Produktsatz der Operatorenrechnung aus und wendet diesen Satz auf die Berechnung einiger im Titel genannter bestimmter Integrale an. Hierzu wendet er diesen Satz auf Integraldarstellungen für das Produkt zweier Whittakerscher Funktionen mit verschiedenen Argumenten an. Es ergeben sich neue Integraldarstellungen für solche Produkte. Weiterhin ergeben sich Integraldarstellungen für einzelne Whittakersche Funktionen. Insbesondere gibt Verf. eine Reihe von Ausdrücken, welche parabolische Zylinderfunktionen enthalten. *M. Strutt.*

Tricomi, Francesco: Sul comportamento asintotico dell' n -esimo polinomio di Laguerre nell'intorno dell'ascissa $4n$. *Comment. math. Helvetici* **22**, 150—167.

Zur Behandlung der angegebenen Fragestellung wird die Kummersche Differentialgleichung $xy'' + (c-x)y' - ay = 0$ durch $y = e^{x/2}z$, $x = v - \gamma v^{1/3}t$ ($v = 2c - 4a$, $\gamma = \sqrt[3]{4/3}$) in die Form gebracht

$$L(z) \equiv z''(t) + tz/3 = (tz''(t) + cz'(t))\mu,$$

worin insbesondere für die Laguerreschen Polynome

$$a = -n, c = \alpha + 1, v = 4n + 2(\alpha + 1), \mu = O(n^{-2/3})$$

für $n \rightarrow \infty$. Es kann daher die oben (siehe dies. Zbl. **34**, 352) geschilderte Methode zur asymptotischen Darstellung der Lösungen angewendet werden. $L(z) = 0$ führt nun bekanntlich auf die Besselschen Funktionen von den Indizes $\pm \frac{1}{2}$, und, wenn man γ_1, γ_2 kennt, ergibt schon die Berücksichtigung des 1. Gliedes in (4) für die betreffende Kummersche Funktion eine Darstellung bis auf einen Fehler $O(v^{-2/3})$. Es wird sogar noch eine 2. Näherung hergeleitet, wozu es genügt, für $G_i(x)$ in (4) das 1. Glied in (2) (außerhalb des Integralzeichens) heranzuziehen. Die Hauptschwierigkeit besteht in der Bestimmung der γ_j für irgendeine bestimmt normierte Lösung. Sie wird für die Laguerreschen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ mit Hilfe der Sattelpunktmethode durchgeführt, und zwar auf Grund der neuen Integraldarstellung

$$(-1)^n e^{-x/2} L_n^{(\alpha)}(x) = (-2^{-\alpha}/2\pi i) \int_{1^+} e^{(v/2)q_x(\zeta)} (1 - \zeta^2)^{(\alpha-1)/2} d\zeta,$$

hierbei hat $q_x(\zeta)$ für $x = v$ im Punkt $\zeta = 0$ eine dreifache Nullstelle. Bis auf exponentiell verschwindende Beiträge darf für den Integrationsweg ein Paar konjugiert imaginärer Halbstrahlen durch den Nullpunkt genommen werden. Die erste Näherung für $L_n^{(\alpha)}(v)$ und $L_{n-1}^{(\alpha)}(v)$ genügt für den vorliegenden Zweck, und man erhält schließlich für die großen Nullstellen von $L_n^{(\alpha)}(x)$ die asymptotische Darstellung

$$\lambda_{n,n-r+1}^{(\alpha)} = v - \gamma i_r v^{1/3} + \frac{1}{5} (\gamma i_r)^2 v^{-1/3} + O(n^{-1}),$$

$$\gamma i_r = (3s_r)^{2/3}, J_{-1/3}(s_r) + J_{1/3}(s_r) = 0.$$

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Turán, Paul: On Descartes-Harriot's rule. *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 797—800 (1949).

L'A. démontre le théorème suivant: Désignons comme l'habitude par $L_r(x)$ les polynomes de Laguerre $L_r(x) = \frac{e^x}{r!} \frac{d^r}{dx^r} (e^{-x} x^r)$. Le nombre des zéros positifs du polynome $a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \dots + a_n L_n(x)$ ne surpasse pas le nombre des variations de signes de la suite des différences des nombres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, c'est-à-dire de la suite $a_0, \Delta a_0, \Delta^2 a_0, \dots, \Delta^n a_0, \Delta^k a_v = \Delta^{k-1} a_v - \Delta^{k-1} a_{v+1}$. *N. Obrechhoff* (Sofia).

Meixner, Josef: Reihenentwicklungen vom Siegerschen Typus für die Sphäroid-Funktionen. *Arch. Math.*, Karlsruhe **1**, 432—440 (1949).

Verf. geht davon aus, daß die Lösungen der Differentialgleichung der Sphäroid-funktionen einer linearen homogenen Integralgleichung genügen, deren Kern eine

im Integrationsbereiche endliche Lösung der Wellengleichung darstellt. Als Kern setzt er einen Ausdruck an, der eine Zylinderfunktion der Ordnung $\mu + \frac{1}{2}$ enthält. Dieser Ausdruck wird nun in eine unendliche Reihe entwickelt, deren Reihenglieder Zylinderfunktionen und Gegenbauersche Funktionen enthalten. Einsetzen dieser Reihe in die ursprüngliche Integralgleichung ergibt sofort eine entsprechende Reihendarstellung für die betreffenden Sphäroidfunktionen. Die Koeffizienten der Reihe werden durch Rekursionsformeln erhalten. Verf. geht auf das asymptotische Verhalten der Reihe in bezug auf die unabhängige Variable ein und auch auf die Normierung der Reihe. Hierauf widmet er den weiteren Raum der Berechnung der Reihenkoeffizienten. *M. Strutt (Zürich).*

Abramowitz, Milton: Asymptotic expansions of spheroidal wave functions. *J. Math. Physics, Massachusetts* **28**, 195—199 (1949).

Die Lösungen der Differentialgleichung der Sphäroid-Funktionen

$$(1 - z^2) y'' - 2(m + 1)z y' + (b - c^2 z^2) y = 0$$

werden für die beiden Fälle a) $m \gg c$ ($c > 0$) und b) $m \gg 1$, $c/(m + 1) = \text{endlich}$, untersucht. Die Eigenfunktionen lassen sich in beiden Fällen mit Hilfe von Hermiteischen Polynomen ausdrücken. Für die Eigenwerte werden asymptotische Formeln angegeben. *J. Meixner (Aachen).*

Bailey, W. N.: Well-poised basic hypergeometric series. *Quart. J. Math. (Oxford Ser.)* **18**, 157—166 (1947).

Als „hypergeometrische Basisreihen“ werden in der englischen Literatur Potenzreihen der Form bezeichnet

$${}_r\Phi_s \left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r; z \\ \varrho_1, \dots, \varrho_s \end{matrix} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{a,n} \dots (\alpha_r)_{a,n}}{(\varrho_1)_{a,n} \dots (\varrho_s)_{a,n}} z^n,$$

worin $(\alpha)_{a,n} = (1 - \alpha)(1 - \alpha q) \dots (1 - \alpha q^{n-1})$; $(\alpha)_{a,0} = 1$. Sie können als Verallgemeinerungen der bekannten Heineschen Reihe ($r = 2$, $s = 3$) angesehen werden [in etwas modifizierter Bezeichnungsweise; etwa Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge 1935 (dies. Zbl. **11**, 23) Kap. 8 sowie neuerdings W. Hahn (dies. Zbl. **33**, 57), woselbst allerdings die Beziehung zu der Baileyschen Arbeitsrichtung nicht hergestellt ist]. In Analogie zu einer Begriffsbildung bei hypergeometrischen Reihen heißt eine Basisreihe „well poised“, wenn $r = s + 1$, $\alpha_1 q = \alpha_{s+1} \varrho_s$, $s = 1, 2, \dots$. Verf. gibt eine neue lineare, nichthomogene Relation zwischen zwei Reihen ${}_s\Phi_7$ mit geeignet zugeordneten Parametern bei $z = q$, ferner Relationen zwischen je vier Reihen ${}_{10}\Phi_9$, die, durch weitere Spezialisierung der Parameter in Beziehungen für zwei oder drei ebensolche, durch Grenzübergang in Formeln für zwei oder drei Reihen ${}_8\Phi_7$ übergehen. *Hermann Schmidt (Braunschweig).*

Jackson, M.: On some formulae in partition theory, and bilateral basic hypergeometric series. *J. London math. Soc.* **24**, 233—237 (1949).

A. O. L. Atkin und H. P. F. Swinnerton-Dyer haben folgende Formel (unveröffentlicht) aufgestellt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{3n(n+1)/2} \left[\frac{\xi^{-3n}}{1 - z \xi^{-1} q^n} + \frac{\xi^{3n+3}}{1 - z \xi q^n} \right] \\ &= \frac{\xi P(\xi^2, q)}{P(\xi, q)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{(-1)^n q^{3n(n+1)/2}}{1 - z q^n} \right\} + \frac{P(\xi, q) P(\xi^2, q) \left\{ \prod_{r=1}^{\infty} (1 - q^r) \right\}^2}{P(z \xi^{-1}, q) P(z, q) P(z \xi, q)}, \end{aligned}$$

wo $P(z, q) = \prod_{r=0}^{\infty} (1 - z q^r) (1 - z^{-1} q^{r+1})$ und $|q| < 1$ ist. Verf. gibt nun eine Formel, welche die obige enthält. Auf die Angabe der genauen Form dieser Formel (welche mehr als die Hälfte einer Druckseite einnimmt) muß verzichtet werden. Es sei aber soviel bemerkt (und das macht das Interesse an dieser Formel aus), daß sie für eine nach beiden Richtungen unendliche „wellpoised“ hypergeome-

trische Reihe ${}_8\Psi_8$ in sieben Parametern [für die Definition von ${}_r\Psi_r$ sei auf eine Arbeit von Bailey (dies. Zbl. 14, 160) verwiesen] eine Relation gibt, in welcher zwei „wellpoised basic“ Reihen ${}_8\Phi_7$ (Heinesche Basisreihen; vgl. das Buch von Bailey, dies. Zbl. 11, 23) vorkommen. Beim Beweis geht Verf. von einer Formel von D. B. Sears über wellpoised basic Reihen (Proc. London math. Soc., im Druck) aus. Zum Schluß werden noch Verallgemeinerungen kurz besprochen. *Hlawka.*

Funktionentheorie:

• Goursat, Edouard: Cours d'analyse mathématique. — Tome II: Théorie des fonctions analytiques, équations différentielles, équations aux dérivées partielles du premier ordre. — 7. éd., revue et augmentée par Jean Favard. Paris: Gauthier-Villars 1949. 686 p.; 3000 francs.

Bruynes, H. and G. Raisbeck: A method of analytic continuation suggested by heuristic principles. Bull. Amer. math. Soc. 55, 193—197 (1949).

Für $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu}/\nu!$ und kleine δ notieren die Verff. die Näherung $f(n\delta) \cong \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} f_{\nu} \delta^{\nu}$ und fragen nach deren Konvergenzbereich \Re . Eine bekannte Bemerkung Borels erlaubt, die Frage allein an der geometrischen Reihe zu behandeln. Für $z = \varrho e^{i\vartheta}$ erweist sich \Re als umfassender als der Einheitskreis, nämlich im wesentlichen bestimmt durch die Außenschleife von $\cos \vartheta < \varrho(1 - \log \varrho)$. Die Cauchysche Integralformel führt zum allgemeineren Fall. Man kann aus dem Verfahren eine Methode zur analytischen Fortsetzung herauschälen. *Egon Ullrich.*

Mařík, Jan: Potenzreihen auf der Berandung des Konvergenzkreises. Časopis Mat. Fysiky, Praha 73, D 49—D 52 (1949) [Tschechisch].

Zunächst beweist Verf. folgenden Hilfssatz: $\{\alpha_{\nu}\}$ und $\{\beta_{\nu}\}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) seien zwei Folgen komplexer Zahlen, für welche die Folge $\left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k \right\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) gleichmäßig beschränkt ist, $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n|$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ gilt. Dann

ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ konvergent. — Im Anschluß hieran werden zwei Sätze angegeben, welche eine Aussage über das Verhalten gewisser Potenzreihen auf der Berandung des Konvergenzkreises machen. Satz 1. K sei eine natürliche Zahl und die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{Kn}$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Ist dann die

Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z^{K(n+1)} - a_n z^{Kn}|$ für eine Stelle z_0 auf $|z| = R$ konvergent und gilt außerdem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^{Kn} = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{Kn}$ überall auf der

Berandung des Konvergenzkreises höchstens mit Ausnahme der Stellen $z = z_0 e^{2k\pi i/K}$; $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$. Satz 2. Es sei wieder K eine natürliche Zahl, die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{Kn}$ habe den Konvergenzradius $R > 0$, und es existiere

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n+1} = x$. Dann ist $|\alpha| = R^K$. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^{Kn}$ divergent, so

kann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z_0^{K(n+1)} - a_n z_0^{Kn}|$, $|z_0| = R$, nur konvergieren, sobald $z_0^K = x$ ist. Als Beispiel werden die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}$ $\left(= \frac{\arctg z}{z} \right.$ für

$0 < |z| < 1$) und $\arctg z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ betrachtet. *Lammel (Tutzing).*

Vostrecov, B. A.: Über die Existenz der Randwerte und über die Integraldarstellung von im Einheitskreis analytischen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 7—8 (1949) [Russisch].

Verf. spricht folgende Sätze aus und skizziert ihren Beweis: I. Zu jeder Potenzreihe mit $|z| < 1$ als Konvergenzkreis existiert eine Majorantenreihe, deren Summe für fast alle $e^{i\vartheta}$ bei $z \nearrow e^{i\vartheta}$ konvergiert. II. Jede Funktion, die in $|z| < 1$ analytisch ist, gestattet eine Integraldarstellung der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \omega(e^{i\vartheta}) g\left(\frac{1}{1-z e^{-i\vartheta}}\right) d\vartheta,$$

wo $g(t)$ eine ganze Funktion von t ist, während $\omega(e^{i\vartheta})$ eine Funktion der Klasse L_2 im Intervall $(0, 2\pi)$ bedeutet. *Egon Ullrich (Gießen).*

Wright, E. M.: On the coefficients of power series having exponential singularities. (Second paper.) J. London math. Soc. **24**, 304—309 (1950).

Let $f(x) = (1-x)^{-\beta} g(x) e^{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, where $g(x)$ is regular for $|x| \leq 1$, $g(1) \neq 0$, $P(x) = \sum_{m=1}^M a_m (1-x)^{-\varrho_m}$, $\varrho_1, \dots, \varrho_M$ real, β, a_1, \dots, a_M complex. The au. gives the leading term in the asymptotic expansion of c_n for large n . Results and notations of a paper of the au. and Miss B. G. Yates [Quart. J. Math. (Oxford Ser.), unpublished] are used throughout. *Horváth (Paris).*

Hadwiger, H.: Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art. Comment. math. Helvetici **20**, 319—332 (1947).

Es sei $F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu}$ ein für $|t| < 1$ konvergentes Funktionselement, das für $0 \leq t < 1$ betrachtet wird. Bei geeigneter Korrespondenz zwischen n und t mit $n \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 1-0$ (Beispiel: $t = 1 - 1/n$) lassen sich Aussagen über den Zusammenhang zwischen den Funktionswerten $F(t)$ und den Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}$ der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ machen. A. Wintner [Comment. math. Helvetici **20**, 216—222 (1947)] hat diese vom Verf. in zwei früheren Noten [vgl. dies. Zbl. **28**, 391; **30**, 49] angeschnittenen Fragen aufgegriffen und dabei das folgende Hauptergebnis erzielt. Ist $\alpha^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |a_n|$, $\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \left| \sum_{\nu=1}^n \nu a_{\nu} \right|$ ($0 \leq \alpha^*, \alpha \leq +\infty$), so gibt es zwei beste (d. h. kleinste) Konstanten τ^* und τ , so daß

$$(1) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 1-0} \left| F(t) - \sum_{n \leq -1/\log t} a_n \right| \leq \tau^* \alpha^*; \quad (2) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow 1-0} \left| F(t) - \sum_{n \leq -1/\log t} a_n \right| \leq \tau \alpha$$

ist. (Darin sind z. B. die beiden klassischen Tauberschen Umkehrsätze für die A -Summierung als Spezialfälle enthalten.) Wintner beweist die Existenz der beiden Konstanten τ^* und τ und zeigt, daß sie gewissen Größenbeziehungen genügen. — Das Hauptergebnis der vorliegenden Note ist die exakte Bestimmung der Werte von τ^* und τ . Verf. findet

$$(3) \quad \tau^* = C + 2 \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 1,015983\dots; \quad (4) \quad \tau = C + \frac{2}{e} + 2 \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 1,751742\dots,$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet, und bezeichnet τ^* und τ als Konstanten Tauberscher Art. Der Nachweis wird folgendermaßen geführt: Zuerst wird gezeigt, daß

$$(5) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| F\left(1 - \frac{1}{n}\right) - s_n \right| \leq \tau^* \alpha^*; \quad (6) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| F\left(1 - \frac{1}{n}\right) - s_n \right| \leq \tau \alpha$$

ist, wenn τ^* und τ die durch (3) und (4) gegebenen Werte haben. Sodann werden explizit zwei Funktionen $G^*(t)$ und $G(t)$ angegeben, für die in (5) bzw. (6) das Gleichheitszeichen steht, so daß also die Konstanten τ^* und τ aus (3) und (4) bezüglich der Ungleichungen (5) und (6) die bestmöglichen sind. Schließlich wird gezeigt, daß die beiden von A. Wintner untersuchten Konstanten mit den bezüglich (5) und (6) bestmöglichen Konstanten, also mit den durch (3) und (4) gegebenen Werten übereinstimmen. — Man vergleiche eine in der Zwischenzeit erschienene, dieselben Fragestellungen behandelnde und sie weiterführende Arbeit von P. P. Agnew (dies. Zbl. 32, 152). *Meyer-König* (Stuttgart).

Goodman, Adolph-W.: Sur les coefficients des fonctions p -valentes. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1917—1918 (1949).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 31, 353) hat Verf. für im Einheitskreise p -wertige Funktionen eine Vermutung über die Koeffizienten ausgesprochen, welche die Bieberbachsche Hypothese über die Koeffizienten der schlichten Funktionen erweitert. Nach Definition von p -blättriger Konvexität bzw. Sternförmigkeit einer p -wertigen Funktion, gibt Verf. (bis auf weiteres ohne Beweis) zwei Sätze, nach welchen im zweiblättrigen Fall die Vermutung in bezug auf den Koeffizienten der dritten Potenz zutrifft, wenn die Funktion sternförmig ist, und im konvexen Fall sogar verschärft werden kann. *G. af Hällström* (Åbo).

Darwin, Charles: Some conformal transformations involving elliptic functions. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 41, 1—11 (1950).

Wird die komplexe Zahlenebene von Streckenzügen, insbesondere Polygonen und Schlitten, berandet und das verbliebene Gebiet konform abgebildet durch Transzendenten, welche dem Körper der elliptischen Funktionen entnommen sind, so gelingt bekanntlich schon durch diese enge Funktionenklasse die Behandlung verschiedener technisch und aerodynamisch interessanter Stromfelder. — Verf. benutzt nur rationale Verbindungen der 3 Jacobischen Grundfunktionen $\operatorname{sn}(u)$; $\operatorname{cn}(u)$; $\operatorname{dn}(u)$ sowie $\int_0^u dt \operatorname{dn}^2(t)$, um damit insbesondere den Fall von Rechtecken mit angesetzten Schlitten durchzurechnen. *Wilh. Maier* (Jena).

Combes, Jean: Fonctions uniformes sur une surface de Riemann algébrique. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 14—16 (1949).

Sei F die Riemannsche Fläche über einem Gebiet D (das jedenfalls ∞ als Randpunkt hat), auf welcher eine Algebroid eindeutig ist. Skizze der Nachweise, daß es auf F folgende Funktionstypen gibt: Nach Vorgabe einer Folge isolierter Punkte s_p regulär auf F bis auf Pole oder wesentliche Singularitäten in s_p mit vorgegebenen Hauptteilen; Abelsche Integrale 1. und 2. Gattung mit vorgegebenen Perioden an einem geeigneten System von Hauptschnitten; meromorphe Funktionen mit vorgegebenen Null- und Polstellen. Bei einfach zusammenhängendem D Funktionen mit vorgeschriebener Norm. Verallgemeinerung auf Flächen wachsender Blattzahl. *Egon Ullrich* (Gießen).

Combes, Jean: Sur l'uniformisation des fonctions algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1325—1326 (1948).

Ansätze zur Uniformisierung algebroider Funktionen mittels fuchsoider Funktionen; deren Gruppe geht aus unendlich vielen Erzeugenden hervor. Natur des Fundamentalbereichs; hinreichende Bedingung für fuchsoiden Polygone. Existenz automorpher Funktionen zu einer solchen Gruppe; es muß auf die Forderung verzichtet werden, daß diese im Diskontinuitätsbereich endlich-wertig sind. Linear polymorphe Funktionen mit vorgeschriebenen Signaturen l_p in isolierten Punkten e_p über einer algebroiden Fläche. *Egon Ullrich* (Gießen).

Littlewood, J. E. and A. C. Offord: On the distribution of zeros and a -values of a random integral function. II. Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 885—952 (1948). Errata. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 990—991 (1949).

In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse von G. Pólya [Math. Z. 29, 549—640 (1929)] und von A. Dvoretzky über die Verteilung der Juliaschen Richtungen „fast aller“ ganzer Funktionen wesentlich verschärft und ergänzt. Der Terminus „fast alle“ bezieht sich hierbei auf eine Klasse \mathfrak{F} von ganzen Funktionen, die aus einer gegebenen ganzen Funktion $F(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ durch beliebige Verteilung der Faktoren $+1$ und -1 auf die Koeffizienten a_n hervorgehen. Durch die Rademacherschen Funktionen $r_n(t)$ werden nun die von $p \cdot 2^{-q}$ verschiedenen t -Werte des Intervalles $(0, 1)$ auf die Funktionen $f(z, t) = \sum_0^{\infty} r_n(t) a_n z^n$ der Klasse \mathfrak{F} abgebildet und dadurch jeder Teilmenge von \mathfrak{F} ein Maß, nämlich dasjenige der entsprechenden t -Menge, zugeordnet. Eine wesentliche Rolle spielen ferner der Maximalterm $m(R)$ und der Maximalindex $N(R)$ der Reihe $\sum_0^{\infty} |a_n| R^n$ sowie die Größen $m(R, R') = |a_{N(R)}| \cdot R'^{N(R)}$ und

$$J(R, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{m(|R + r e^{i\theta}|)}{m(R, |R + r e^{i\theta}|)} d\theta,$$

die allen Elementen aus \mathfrak{F} gemeinsam sind. Auf die einzelnen $f \in \mathfrak{F}$ empfindlich ist dagegen die Größe

$$v(z, r; t, a) = \int_{|z|^{-2-2}}^r n(z, u; t, a) \frac{du}{u}$$

wo $n(z, r; t, a)$ die a -Stellenzahl von $f(z, t)$ im Kreis mit dem Zentrum z und Radius r bezeichnet. Grundlegend für die ganze Untersuchung ist das folgende Theorem: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $R_0(\varepsilon)$ und eine Teilmenge \mathfrak{E} aus \mathfrak{F} vom Maß $< \varepsilon$, so daß für alle $f \in \mathfrak{F} - \mathfrak{E}$, alle z mit $|z| > R_0(\varepsilon)$, alle $r < \frac{1}{2}|z|$ und alle a mit $|a| < m(|z| - a)$ gilt $|J(R, r) - v(z, r; t, a)| < R^\varepsilon$. Die v -Verteilung der a -Stellen ist also für alle $f \in \mathfrak{F} - \mathfrak{E}$ fast dieselbe. Daraus ergeben sich u. a. folgende Resultate: Für fast alle $f \in \mathfrak{F}$ (Maß der t -Menge $= 1$) sind sämtliche Richtungen Borelsche Richtungen. Dieses Resultat kann noch dadurch verschärft werden, daß man die Winkelräume $|\arg z - \alpha| < \varepsilon$ durch asymptotisch wesentlich engere Gebiete ersetzt. Ist z. B. die Ordnung $\rho > 1$, so nehmen fast alle f in jedem Parallelstreifen jeden Wert unendlich oft an. Ein Hauptresultat der Arbeit bezieht sich auf die Verteilung der „Senken“ (pits) auf der Betragsfläche von $f(z, t)$. Diese „Senken“ sind gewisse Umgebungen der Nullstellen von f , auf deren Rand $\log |f(z)|$ von der Größenordnung $\log m(|z|) - C|z|^{2\varepsilon}$ ist. Ihre Vielfachheit ist gleich der Zahl der darin enthaltenen Nullstellen. Diese „Senken“ sind ziemlich gleichmäßig verteilt für fast alle Elemente aus \mathfrak{F} . Für $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich eine Teilmenge $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$ vom Maß $> 1 - \varepsilon$ von der folgenden Art: Für alle f aus \mathfrak{F}^* ist die Anzahl der „Senken“ im Sektor $|\arg \zeta - \alpha| < \gamma$, $|\zeta| < P$ zwischen $(\gamma/1000\pi) \cdot N((1 - \gamma)P) - P^\varepsilon/\gamma$ und $2\gamma N((1 + \gamma)P) + P^\varepsilon/\gamma$, ihre Anzahl im Kreisring $P - r < |z| < P + r$ zwischen $N_*(P, r)/40\pi - P^{1+\varepsilon}/r$ und $6N^*(P, r) + P^{1+\varepsilon}/r$, ihre Anzahl im Kreis $|\zeta - z| < r$ ($|z| = R$) zwischen $\frac{1}{40\pi} \frac{r}{R} N_*(R, r) - R^\varepsilon$ und $2 \frac{r}{R} N^*(R, r) + R^\varepsilon$. Dabei ist $N_*(R, r) = \max_{0 \leq \kappa \leq 1} (1 - \kappa)^{3/2} (N(R + \kappa r) - N(R - \kappa r))$ und $N^*(R, r)$ eine ähnliche Größe. Die gegebenen Schranken sind größenordnungsmäßig die bestmöglichen. Für Teil I siehe J. London math. Soc. 20, 130—136 (1945).

Saxer (Zürich).

Lambin, N. V.: Über wesentlich singuläre Punkte mit einer endlichen Anzahl von topologisch verschiedenen asymptotischen Werten, die von null und unendlich verschieden sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 605—606 (1949) [Russisch].

Verf. behauptet: „Ist $f(z)$ ganz, $f = 0$, $f' = 0$ nur in endlich vielen Punkten,

und existiert nur eine endliche Anzahl n unterschiedener Zielwege mit Zielwerten $\omega \neq 0, \infty$, so gilt

$$f(z) = C \exp \int_a^z R(t) e^{p(t)} dt$$

mit $R(t)$ = rationale Funktion, $p(t)$ = Polynom vom Grad n . — Die Formulierung ist unzureichend, eine Begründung fehlt. *Egon Ullrich* (Gießen).

Pfluger, Albert: Sur l'existence de fonctions non constantes, analytiques, uniformes et bornées sur une surface de Riemann ouverte. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 166—168 (1950).

En introduisant sur la surface de Riemann ouverte \mathfrak{F} une métrique conforme convenable et en choisissant un point O de \mathfrak{F} , on peut définir des domaines D_p (formés des points dont la distance à O est $\leq p$) qui sont compacts et qui engendrent \mathfrak{F} . La frontière de D_p est formée de $n(p)$ courbes de Jordan de longueurs $\leq \Lambda(p)$. On pose $N(p) = \max_{p' \leq p} n(p')$. Si

$$\lim \left[4\pi \int_0^R \frac{dp}{\Lambda(p)} - \log N(R) \right] = \infty,$$

toute fonction analytique, uniforme et bornée sur \mathfrak{F} est une const. *Dufresnoy*.

Pfluger, Albert: Über das Anwachsen eindeutiger analytischer Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I Nr. **64**, 18 S. (1949).

Etant donnée une surface de Riemann \mathfrak{F} , l'A. étudie d'abord s'il existe sur \mathfrak{F} des fonctions w analytiques, uniformes, non constantes, dont le module est borné ou dont l'intégrale de Dirichlet D est borné. En considérant \mathfrak{F} comme engendrée par une suite de surfaces compactes emboîtées F_n et en introduisant les modules harmoniques et analytiques des anneaux $F_n - F_0$, il établit des conditions suffisantes de non-existence de telles fonctions. Il étudie ensuite la croissance, quand $n \rightarrow \infty$, du module maximum et de l'intégrale de Dirichlet de w sur F_n . Enfin, si \mathfrak{F} est telle qu'il existe des fonctions $w = z + \dots$ pour lesquelles $\max |w|$ et D sont bornés, l'A. donne des bornes inférieures de ces quantités, généralisant ainsi le lemme de Schwarz et le premier théorème sur les aires de Bieberbach.

Dufresnoy (Bordeaux).

Bader, Roger: La théorie du potentiel sur une surface de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 2001—2002 (1949).

Es wird ein Verfahren skizziert, wodurch man auf einer Riemannschen Fläche eine harmonische Funktion konstruieren kann, die in zwei vorgegebenen Punkten logarithmisch positiv bzw. negativ unendlich wird. Ist der ideale Rand der Fläche von positivem harmonischen Maß, so ergibt sich die Funktion unmittelbar als Differenz zweier Greenscher Funktionen. Im Falle eines Nullrandes ist dagegen ein Grenzprozeß erforderlich. Die gewonnene verallgemeinerte Logarithmenfunktion verwendet Verf., um ein Massenpotential und einen Kapazitätsbegriff auf der Fläche zu definieren.

G. af Hällström (Åbo).

Parreau, Michel: Variation du défaut d'Ahlfors avec l'origine du plan des z . C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1198—1199 (1948).

Dugué (dies. Zbl. **29**, 34) hat bewiesen, daß der Nevanlinnasche Defekt vom Nullpunkt der z -Ebene abhängen kann. Valiron (dies. Zbl. **29**, 123) hat hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß der Defekt vom Nullpunkt unabhängig ist. Verf. zeigt mit Hilfe des Beispiels von Dugué, daß auch der Ahlforssche Defekt vom Nullpunkt abhängen kann. Er definiert weiter einen „regularisierten“ Defekt, der vom Nullpunkt unabhängig ist.

V. Paatero (Helsinki).

Galbraith, A. S., W. Seidel and J. L. Walsh: On the growth of derivatives of functions omitting two values. Trans. Amer. math. Soc. **67**, 320—326 (1949).

Es werden solche im Einheitskreise reguläre Funktionen $w = f(z)$ betrachtet, die ebenda zwei endliche Werte nicht annehmen. Gibt es nun eine Folge z_n mit $w_n = f(z_n) \rightarrow \infty$, so daß jedoch $w_n D_1(w_n) \ln |w_n| \rightarrow 0$, wobei $D_1(w_n)$ den kürzesten Abstand von w_n zu einem Windungspunkt bedeutet, dann gilt $(1 - |z_n|^2) f'(z_n) \rightarrow 0$. Der Satz läßt sich in der Richtung erweitern, daß auch höhere Ableitungen mit einbezogen werden. Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß das Auslassen von endlichen Werten eine wesentliche Voraussetzung ist. *G. af Hällström.*

Fuchs, W. H. J.: On a theorem of Mandelbrojt. J. London math. Soc. **22**, 19—25 (1947).

Es handelt sich um Bedingungen für die Folge der (positiven, monoton ins Unendliche wachsenden) Dirichlet-Exponenten λ_p und die Schrankenkonstanten M_q , die bewirken, daß aus den Ungleichungen

$$\left| F(s) - \sum_1^n d_\nu e^{-\lambda_\nu s} \right| < M_q e^{-q\sigma}$$

für $n = 1, 2, \dots$ und jede ganze Zahl q aus $\lambda_n \leq q < \lambda_{n+1}$, bei $s = \sigma + it$ im Streifen $|t| < a\pi$ auf identisches Verschwinden von $F(s)$ geschlossen werden kann ($a > \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x}$, wo $N(x)$ die Anzahl der $\lambda_\nu \leq x$ bedeutet). Es wird eine Erweiterung eines Satzes von Mandelbrojt gegeben, die zugleich einen neuen Beweis desselben liefert; und zwar werden als neue Größen in die Betrachtung eingeführt: $\psi(r) = \exp\left(2 \sum_{\lambda_\nu < r} 1/\lambda_\nu\right)$, ferner mit einer reellen Funktion $v(x) \geq 1$

$S(r) = \overline{\lim}_{0 \leq x \leq r} \psi^x(r)/v(x)$, sowie, in Modifikation einer zuerst von Ostrowski in diesen Fragenkreis eingeführten Größe, $T^*(r) = \overline{\lim}_{q \geq 1} r_q/M_q v(q)$. Alsdann sind die fraglichen Bedingungen: Existenz eines $v(x)$ derart, daß

$$\int_1^\infty \lg S(r) r^{-2} dr < \infty, \quad \int_1^\infty \lg T^*(r) r^{-1-1/2a} dr = \infty.$$

Für die Einzelheiten ist die Kenntnis der folgenden, dem Ref. unzugänglich gebliebenen Arbeiten erforderlich: S. Mandelbrojt, Quasi-analyticity and analytic continuation — a general principle. Trans. Amer. math. Soc. **55**, 96—131 (1944). W. J. H. Fuchs, On the closure of $\{e^{-t\lambda_\nu}\}$, Proc. Cambridge philos. Soc. **42**, 91—105 (1946). *Hermann Schmidt* (Braunschweig).

Agmon, Shmuel: Sur les séries de Dirichlet. Ann. Sci. École norm. sup., III. S. **66**, 263—310 (1949).

Verf. betrachtet Dirichletsche Reihen

$$f(s) = \sum d_n e^{-\lambda_n s} \quad \text{mit} \quad 0 < h \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq H < \infty$$

und mit der Konvergenzabszisse 0. Unter der Voraussetzung, daß sich $f(s)$ in die linke Halbebene analytisch fortsetzen läßt, schätzt Verf. die Differenz zwischen $f(s)$ und der n -ten Partialsumme. Weiter wird $f(s)$ in bezug auf ihre Singularitäten auf der Imaginärachse untersucht, und es werden im besonderen Kriterien dafür aufgestellt, daß diese Achse natürliche Grenze ist. Daran schließen sich auch Aussagen über das Anwachsen einer im Einheitskreise konvergenten Potenzreihe.

G. af Hällström (Åbo).

Položij, G. W.: Über p -analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **56**, 1275—1278 (1947) [Russisch].

Die Funktion $p(z)$ sei in einem beschränkten Gebiet G eindeutig positiv, beschränkt. $w(z) = u + iv$ heiße p -analytisch in G , wenn dort die partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren, stetig sind und die (verallgemeinerten Cauchy-Riemannschen) Differentialgleichungen erfüllen:

$$u_x = \frac{1}{p(z)} v_y, \quad u_y = -\frac{1}{p(z)} v_x.$$

Verf. beweist „Seitenstücke“ für einige der elementaren Tatsachen der komplexen Funktionentheorie.
Egon Ullrich (Gießen).

Lopatinsky, Ja. B.: Über eine Verallgemeinerung des Begriffs der analytischen Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **64**, 155—158 (1949) [Russisch].

Die Forderung, daß $w = u + i v$ im Gebiet G den Cauchy-Riemannschen Gleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ genüge, wird ersetzt durch die Forderung, daß die Differentialgleichungen bestehen

$$A u = B v, \quad A v = -B u$$

mit den Operatoren $(\kappa + \lambda = n)$

$$A = \sum a_{\kappa\lambda} \xi^\kappa \eta^\lambda, \quad B = \sum b_{\kappa\lambda} \xi^\kappa \eta^\lambda$$

(deren Resultante $\neq 0$ in G sei); dabei stehen ξ und η für die Operatoren $\partial/\partial x$ bzw. $\partial/\partial y$, und die Koeffizienten $a_{\kappa\lambda}$, $b_{\kappa\lambda}$ seien reelle analytische Funktionen in G . — Einige Theoreme über diese Funktionenklasse $w = w(x, y)$.
Egon Ullrich.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Métral, Paul: Fonctions presque loxodromiques et fonctions presque automorphes. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 752—753 (1948).

Verf. betrachtet „fastloxodromische Funktionen $f(x)$ “ (das sind solche Funktionen, für die $f(e^u)$ fastperiodisch in u ist) und erklärt auf besondere Weise deren Mittelwert. Anmerkung des Ref.: Dieser Mittelwert ist stets Null. — Verf. betrachtet „fastperiodischloxodromische Funktionen“. Anmerkung des Ref.: Nur Konstante sind „fastperiodischloxodromisch“. — Verf. beweist mit raffinierten Abschätzungen usw., daß der Mittelwert der eben genannten Funktionen existiert. Anmerkung des Ref.: Dieser Existenzsatz ist wegen vorstehender Anmerkung trivial. Der betr. Mittelwert ist stets Null.
Maak (Hamburg).

Métral, Paul: Fonctions analytiques presque loxodromiques et presque périodiques loxodromiques. Généralisations — relation avec les problèmes de l'itération. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1557—1559 (1949).

Verf. betrachtet nach dem Vorbild der analytischen fastperiodischen Funktionen „analytische fastperiodischloxodromische Funktionen“. Nach Ansicht des Ref. sind diese Funktionen notwendig konstant (vgl. vorstehendes Referat). Maak.

Métral, Paul: Fonctions presque automorphes sur un anneau. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 800—801 (1949).

Verf. betrachtet „fast automorphe Funktionen $f(x)$ “ der Elemente x eines Ringes R . Sicherlich ist jede Konstante fast automorph, wenn auch nach Ansicht des Ref. im allgemeinen dies die einzigen derartigen Funktionen sind. Verf. deutet einen Beweis an für den Satz: Jede dieser Funktionen kann durch endliche Linearkombinationen der Koeffizienten $D_{q,\sigma}(x)$ von „Normaldarstellungen“ des Ringes R beliebig genau approximiert werden. Anmerkung des Ref.: Dieser Satz ist deshalb falsch, weil des Verf. Normaldarstellungen jedem Element des Ringes die Nullmatrix zuordnen und weil es nicht verschwindende Konstanten gibt, welche ja der genannten Klasse von Funktionen angehören.
Maak (Hamburg).

Maaß, H.: Automorphe Funktionen und indefinite quadratische Formen. S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1949**, 1. Abh., 42 S. (1949).

Es seien Q und k ganz, $Q > 0$, $k \geq 0$, $k + 2r > 2$, $\tau = x + i y$, x reell, $y > 0$. Es mögen m_1, m_2 alle Paare ganzer Zahlen in gegebenen Restklassen a_1, a_2 modulo Q durchlaufen, mit Ausnahme des Paares $0, 0$. Man setze

$$E_k(\tau) = E_k(\tau, r, a_1, a_2, Q) = y^r \sum (m_1 \tau + m_2)^{-k} |m_1 \tau + m_2|^{-2r}.$$

Für $r = 0$ ist das eine analytische Funktion von τ , nämlich eine Modulform der Dimension $-k$ zur Stufe Q . Bei beliebigem r gilt ebenfalls (1) $E_k(S\tau) = (c\tau + d)^k E_k(\tau)$

für jede Substitution S der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma = \Gamma(Q)$. Führt man den Operator $\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ ein, so genügt $g(\tau) = E_k(\tau)$ den $k+1$ partiellen

Differentialgleichungen (2) $\prod_{\nu=0}^k (\Delta - (r+\nu)(r+\nu-1)) \tau^\mu g(\tau) = 0$ ($\mu = 0, \dots, k$).

Vermöge (1) und (2) ist dann $E_k(r)$ gekennzeichnet als eine Wellenform der Dimension $-k$ zum Parameter r und zur Gruppe Γ . Eine Wellenform heißt ganz, wenn sie bei Annäherung von τ an einen parabolischen Randpunkt p des Fundamentalbereiches von Γ nicht stärker unendlich wird als eine geeignete Potenz von $(\tau - p)^{-1}$ bzw. von τ für $p = \infty$. Im Falle $k = 1$, $r \neq 1$, $Q > 2$ wird mittels Fourierscher Entwicklung bewiesen, daß die $E_k(\tau)$ eine Basis für die lineare Schar aller ganzen Wellenformen bilden; dabei wird wesentlich benutzt, daß im vorliegenden Fall die sog. Spitzenformen identisch 0 sind. Ein weiteres Hilfsmittel bildet der Satz, daß für $k = 1$, $r(r^2 - 1) \neq 0$ die in der Halbebene $y > 0$ viermal stetig differenzierbaren Lösungen von (2) durch die Werte von $g(\tau)$ und $\partial g(\tau)/\partial x$ auf $x = 0$ eindeutig festgelegt sind. Durch die Mellinsche Transformation läßt sich dann jeder ganzen Wellenform der Dimension -1 ein Paar von Dirichletschen Reihen $\varphi(s) = \sum_{n \neq 0} a_n |n|^{-s}$, $\psi(s) = \sum_{n \neq 0} a_n \operatorname{sgn} n |n|^{-s}$ zuordnen, und das Verhalten der

Schar der E_k bei der Inversion $\tau \rightarrow -1/\tau$ liefert lineare Funktionalgleichungen für die Schar der zugeordneten Dirichletschen Reihen bei der Spiegelung $s \rightarrow 2-s$; umgekehrt gewinnt man auf diesem Wege alle Lösungen der Funktionalgleichungen unter gewissen natürlichen Annahmen für die zugelassenen Funktionen. Insbesondere wird nachgewiesen, daß unter jenen Annahmen die beiden Funktionen $\varphi(s) = \zeta(s-r-\frac{1}{2}) L(s+r-\frac{1}{2})$, $\psi(s) = \zeta(s+r-\frac{1}{2}) L(s-r-\frac{1}{2})$, wobei

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$ gesetzt ist, durch die sie verknüpfende

lineare Funktionalgleichung bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor festgelegt sind. Dies wird schließlich auf die vom Ref. [Math. Z., Berlin 43, 682—708 (1938), 44, 398—426 (1939); dies. Zbl. 18, 203, 19, 151] eingeführten Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen angewendet, um diese explizit durch $\zeta(s)$ und $L(s)$ auszudrücken, für den Fall, daß die quadratische Form von der speziellen Gestalt $x_1^2 + \dots + x_p^2 - (y_1^2 + \dots + y_q^2)$ und pq ungerade, $p+q > 4$ ist. Siegel.

Maaß, Hans: Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16_{3/4}, 72—100 (1949).

Die Untersuchungen des Verf. über Wellenfunktionen von 2 Variablen und ihren Zusammenhang mit Dirichletschen Reihen werden auf n Variable verallgemeinert, wobei der n -dimensionale hyperbolische Raum mit der metrischen Form

$\sum_{k=1}^n \left(\frac{dx_k}{x_n} \right)^2$ zugrunde gelegt wird; die Wellengleichung lautet dann

$$\left\{ x_n^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_n^{2-n} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + r^2 + \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right\} f = 0,$$

mit konstantem r , und es werden Lösungen f betrachtet, welche bei einer Gruppe von nichteuklidischen Bewegungen invariant bleiben. Unter geeigneten Voraussetzungen über die Gruppe liefert dann die Mellinsche Transformation einen eindeutigen Zusammenhang zwischen f und einem System von abzählbar vielen Dirichletschen Reihen mit Funktionalgleichung. Als Anwendung werden gewisse Zetafunktionen mit Größencharakteren für einen relativquadratischen Körper K über einem imaginärquadratischen Zahlkörper R untersucht und das Verhalten der zugeordneten Wellenfunktion f bei den Modulusubstitutionen in R bestimmt; insbesondere ergibt sich f als Invariante gegenüber der vollen Modulgruppe in R , wenn K unverzweigt über R ist.

Siegel (Princeton).

Petersson, Hans: Über die Werte der Riemannschen Zetafunktion für positive ungerade Argumente. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **16**_{3/4}, 119—135 (1949).

Es sei q eine Primzahl, r gerade > 2 , $\tau = x + iy$ komplex mit positivem Imaginärteil y und $G_1 = \sum (q m_1 \tau + m_2)^{-r}$, $G_2 = \sum (m_2 \tau + m_1)^{-r}$, wo beide Male über alle Paare m_1, m_2 mit $(q m_1, m_2) = 1$ zu summieren ist. Die Funktionen G_1 und G_2 sind ganze Modulformen der Dimension $-r$ bezüglich der Gruppe Γ , welche von den Modulsubstitutionen $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ mit $q|c$ gebildet wird. Es sei \mathfrak{F} ein Fundamentalbereich von Γ und $\omega = \int \int_{\mathfrak{F}} G_1 \bar{G}_2 y^{r-2} dx dy$ das Skalarprodukt von G_1 und G_2 .

Mit Hilfe einer vom Verf. (dies. Zbl. **32**, 206) kürzlich entwickelten Methode wird die Berechnung von ω auf die Bestimmung des Residuums einer gewissen Dirichletschen Reihe zurückgeführt. Es zeigt sich, daß der Quotient von ω und $\pi^{1-r} \zeta(r-1)$ eine rationale Zahl ist. Verf. „erscheint es nicht mehr völlig abwegig, zu vermuten, daß — auf Grund dieser Deutung — eine Aufklärung über die arithmetische Natur der Werte $\pi^{-k} \zeta(k)$ ($k = 3, 5, 7, \dots$ ungerade) möglich sein werde“.

Siegel (Princeton).

Petersson, Hans: Über die systematische Bedeutung der Eisensteinschen Reihen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **16**_{1/2}, 104—126 (1949).

Die in zahlreichen Arbeiten des Verf. dargelegte Metrisierung der automorphen Formen mit ihrer Anwendung zur Zerlegung in Spitzenformen und Normalschar wird erneut auseinandergesetzt. Ist die Dimension $-r < -2$, so wird die Normalschar aufgespannt von gewissen Reihen, die nach Art der Eisensteinschen Reihen gebildet sind. Für den Spezialfall der Eisensteinschen Reihen selber, also für den Fall der Modulgruppe und ihrer Untergruppen, lassen sich die für $r = 2$ und $r = 1$ auftretenden Konvergenzschwierigkeiten durch ein von Hecke eingeführtes Summationsverfahren überwinden. Es wird nachgewiesen, daß die durch das Heckesche Verfahren erklärten Eisensteinschen Reihen der Dimension -1 wieder eine Basis der Normalschar bilden. Für die Dimension -2 war das Entsprechende in einer früheren Arbeit des Verf. [Math. Ann., Berlin **117**, 453—537 (1940); dies. Zbl. **23**, 315] gezeigt worden.

Siegel (Princeton).

Petersson, Hans: Über den Körper der Fourierkoeffizienten der von Hecke untersuchten Eisensteinreihen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **16**_{3/4}, 101—113 (1949).

Es seien a_1, a_2, N, r ganze Zahlen, $N > 0, r > 2, (a_1, a_2, N) = 1, \tau$ komplex mit positivem Imaginärteil und $G = \sum (m_1 \tau + m_2)^{-r}$, wo über alle Paare teilerfremder Zahlen m_1, m_2 mit $m_1 = a_1, m_2 = a_2 \pmod{N}$ summiert wird. Die Funktion G ist eine ganze Modulform von der Stufe N und der Dimension $-r$, die zuerst von Hecke [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 199—224 (1927)] untersucht wurde. Für jeden parabolischen Randpunkt eines zugehörigen Fundamentalbereichs entwickelt man G in eine Reihe nach Potenzen der Ortsuniformisierenden. Es wird gezeigt, daß die Koeffizienten sämtlich dem Körper der N -ten Einheitswurzeln angehören und einen gemeinsamen Nenner besitzen.

Siegel (Princeton).

Petersson, Hans: Ein Konvergenzbeweis für Poincarésche Reihen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **16**_{1/2}, 127—130 (1949).

Der vom Verf. [Acta math., Uppsala **80**, 23—63 (1948); dies. Zbl. **31**, 125] gegebene Konvergenzbeweis für drei typen Poincaréscher Reihen wird für den einfachsten Fall, nämlich den Typus $\sum_{c,d} |c\omega + d|^{-r}$ ($|\omega| < 1, r > 2$), erneut dargestellt.

Siegel (Princeton).

Petersson, H.: Über Weierstrasspunkte und die expliziten Darstellungen der automorphen Formen von reeller Dimension. Math. Z., Berlin **52**, 32—59 (1949).

Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe erster Art, p das zugehörige Geschlecht, \mathfrak{G}_r der Vektorraum der ganzen automorphen Formen mit fester reeller Dimension r und

festem Multiplikatorsystem des Betrages 1, ferner \mathfrak{C}_r^* der Teilraum der ganzen Spitzenformen. Die explizite Reduktion von \mathfrak{C}_r modulo \mathfrak{C}_r^* mittels Poincaréscher Partialbruchreihen ist als bekannt anzusehen; es bleibt noch die Aufgabe, eine Basis von \mathfrak{C}_r^* explizit zu konstruieren. Zunächst werden unter Benutzung verallgemeinerter Poincaréscher Reihen und der Metrisierung endlich viele ganze Spitzenformen gewonnen, welche \mathfrak{C}_r^* aufspannen und deren Anzahl höchstens um p größer ist als der Rang von \mathfrak{C}_r^* . Die Konstruktion einer wirklichen Basis gelingt dann vermöge der Eigenschaften der Weierstraßschen Lückenzahlen, falls r eine gewisse Schranke übersteigt, die für $p > 1$ nicht größer als $3 + 1/(p-1)$ ist. Die Resultate werden noch an drei Beispielen für die Hauptkongruenzgruppen der Stufen 4, 7, 8 erläutert.

Siegel (Princeton).

Petersson, Hans: Über die Transformationsfaktoren der relativen Invarianten linearer Substitutionsgruppen. *Mh. Math.*, Wien **53**, 17—41 (1949).

Es sei $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ reell, $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, so daß $L\tau = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$ eine lineare Transformation der oberen τ -Halbebene \mathfrak{H} in sich ist. Für jede in \mathfrak{H} meromorphe Funktion $f(\tau) \not\equiv 0$ genügt $R(\tau, L) = \frac{f(L\tau)}{f(\tau)}$ der Funktionalgleichung

$$(1) \quad R(\tau, L_1) R(L_1 \tau, L_2) = R(\tau, L_2 L_1).$$

Für die Theorie der automorphen Funktionen ist es von Interesse, die allgemeinste rationale Funktion $R(\tau, L) \not\equiv 0$ von $\tau, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen, welche (1) identisch in den neun eingehenden Variablen erfüllt. Es wird durch elementare algebraische Schlüsse bewiesen, daß dies $R(\tau, L) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^h (\gamma\tau + \delta)^r \frac{Q(L\tau)}{Q(\tau)}$ ist, mit beliebigen ganzen Exponenten h, r und beliebiger rationaler Funktion $Q(\tau) \not\equiv 0$. Ferner wird das entsprechende Problem für n Variable τ_1, \dots, τ_n betrachtet, die unabhängig voneinander linear transformiert werden, mit analogem Resultat.

Siegel (Princeton).

Schoeneberg, Bruno: Multiplikative Gruppen algebraischer Funktionen. *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* **16**_{3/4}, 136—139 (1949).

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_\sigma$ ($\sigma \geq 2$) verschiedene Primdivisoren eines algebraischen Gebildes \mathfrak{A} , es sei \mathfrak{G} die Gruppe der Funktionen von \mathfrak{A} , deren sämtliche Nullstellen und Pole in irgend welchen \mathfrak{p}_i liegen. \mathfrak{G} ist eine unendliche Abelsche Gruppe mit $\sigma_0 \leq \sigma - 1$ Erzeugenden. Wie Verf. sehr einfach zeigt, bedeutet $\sigma_0 = \sigma - 1$, daß zu zwei beliebigen $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$ ($i \neq k$) eine „Grundfunktion“ in \mathfrak{G} existiert, deren einziger Pol in \mathfrak{p}_i und deren einzige Nullstelle in \mathfrak{p}_k liegt; jedoch ist dieser Fall in einem gewissen Sinne als Ausnahmefall zu betrachten. Für die $\sigma = \sigma(N)$ Spitzen \mathfrak{p}_i des Fundamentalbereichs der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ folgt $\sigma_0 = \sigma - 1$ aus einem Fundamentalsatz von Hecke über die φ -Teilwerte. Die Existenz der Grundfunktionen verschärft diesen Satz. Darüber hinaus gilt, daß jede Grundfunktion zusammen mit der absoluten Invariante $j(\tau)$ das $\Gamma(N)$ entsprechende algebraische Gebilde erzeugt. Eine weitere Anwendung betrifft die Darstellung der Werte der Integrale erster Gattung in den Spitzen durch ihre Perioden. Zum Schluß wird gezeigt, wie die Wertigkeiten der Grundfunktionen zu berechnen sind.

Petersson (Hamburg).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Forder, H. G.: The Euler-Maclaurin formula. *Math. Gaz.*, London **33**, 172—176 (1949).

Knappe Zusammenstellung einiger Eigenschaften der Bernoullischen Polynome und der Euler-Maclaurinschen Summenformel mit einfachen Anwendungen.

Császár (Budapest).

Romanovskij, V.: Ein neues Verfahren zur Lösung der homogenen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1317—1320 (1948) [Russisch].

Es sei $\varphi_{n+k} - a_1 \varphi_{n+k-1} - \dots - a_n \varphi_k = 0$ die Differenzengleichung; die gesuchte Funktion φ_k nehme für $k = 1, 2, \dots, n$ gegebene Anfangswerte an. Verf. führt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein, mit deren Hilfe man die Gleichung symbolisch in der Form $|E\varphi - A|\varphi^k = 0$ schreiben kann. Aus dieser Gleichung leitet Verf. in einfacher Weise zwei geschlossene Darstellungen für die gesuchte spezielle Lösung ab. Die eine enthält die Elemente der $(k-n)$ -ten Potenz der Matrix A ; die andere ist mit Hilfe der Eigenwerte von A gebildet. — Es sei noch bemerkt, daß das Verfahren nur für ein ganzzahlig variierendes Argument k (1, 2, 3, ...) abgeleitet ist. *W. Hahn* (Berlin).

Stüssi, Fritz: Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung. Z. angew. Math. Physik, Basel 1, 53—70 (1950).

Verf. stellt die Seilpolygongleichung für einen belasteten Balken:

$$-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} = \Delta x K_m(p),$$

wobei M_m das Moment und $K_m(p)$ die Knotenlast im m -ten Knotenpunkt ist, der Differentialgleichung $M'' = -p$ gegenüber. Auf Grund dieses Zusammenhanges kann für jede Funktion y entsprechend geschrieben werden:

$$y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} = \Delta x K_m(y'').$$

Ist y'' stetig, so kann die Knotenlast durch die „Parabelformel“ ausgedrückt werden: $y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} = (\Delta x^2/12)(y''_{m-1} + 10y''_m + y''_{m+1})$. Entsprechende Formeln werden auch bei einem Knick der Knotenlast und für die erste Ableitung in symmetrischer und unsymmetrischer Gestalt angegeben. — Von der zu lösenden Differentialgleichung 2. Ordnung: $y'' + b y' + c y + F(x) = 0$ wird auf die entsprechende Gleichung zwischen den Δx -fachen Knotenlasten übergegangen:

$$\Delta x K_m(y'') + \Delta x K_m(b y') + \Delta x K_m(c y) + \Delta x K_m(F) = 0,$$

und man erhält mit neuen Koeffizienten β und γ :

$$-y_{m-1}(1 - \beta_m + \gamma_{m+1}) + y_m(2 - 10\gamma_m) - y_{m+1}(1 + \beta_m + \gamma_{m+1}) = \Delta x K_m(F)$$

und ähnliche Gleichungen für die Randbedingungen. Als Beispiele werden die gedämpfte, erzwungene Schwingung, das maximale Biegemoment eines Balkens und der beidseitig gelenkig gelagerte Druckstab behandelt. — Diese sehr interessanten Herleitungen mit den Mitteln der technischen Mechanik führen aber letzten Endes zu Gleichungen, die man auch beim Differenzenverfahren durch Heranziehung der Differentialgleichung an mehreren Punkten erhält (s. ob. Parabelformel bei L. Collatz: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945, S. 275).

Rudolf Ludwig (Braunschweig).

Haag, Jules: Sur certains systèmes d'équations différentielles définies par des fonctions périodiques et discontinues. Bull. Sci. math., II. S. 71_I, 205—219 (1947).

Haag, Jules: Sur l'approximation des solutions associées d'un système différentiel à coefficients périodiques. Bull. Sci. math., II. S. 72_I, 69—72 (1948).

Es sei \mathfrak{x} ein Vektor mit den Komponenten x_1, \dots, x_n , entsprechend α und \mathfrak{f} . Es handelt sich um das System

$$(1) \quad \mathfrak{x}(t) = \alpha + \lambda \int_0^t \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t) dt \quad (0 \leq t \leq T).$$

Die Funktion \mathfrak{f} darf Unstetigkeiten folgender Art aufweisen: Für $\kappa = 1, \dots, k$

und $R_0 > 0$ seien $g^1(\xi), \dots, g^k(\xi)$ im Bereich $|\xi| < R_0$ stetig differenzierbar, und es sei $0 < g^1(\xi_1) < \dots < g^k(\xi_k) < T$ für beliebige $|\xi_k| < R_0$. Ferner seien die Funktionen $\tilde{f}^\alpha(\xi, t)$ ($\alpha = 1, \dots, k+1$) nebst ihren Ableitungen nach den x_ν in $|\xi| < R_0$, $0 \leq t \leq T$ stetig. Mit diesen Funktionen wird ($g^0 = 0$, $g^{k+1} = T$) $\tilde{f}(\xi, t) = \tilde{f}^\alpha(\xi, t)$ für $g^{\alpha-1}(\xi) < t < g^\alpha(\xi)$ ($\alpha = 1, \dots, k+1$) gesetzt. — Mit Hilfe des Iterationsverfahrens wird bewiesen, daß (1) für alle hinreichend kleinen $|a|$, $|z|$ genau eine im Intervall $0 \leq t \leq T$ existierende Lösung mit beschränkten Differenzenquotienten hat. — Es wird weiter untersucht, wann (1) für den Fall, daß $\tilde{f}(\xi, t)$ in bezug auf t periodisch mit der Periode T und $\tilde{f}^{k+1} = \tilde{f}^1$ ist, eine periodische Lösung hat. Diese Untersuchung ist in der vorliegenden Form nicht überzeugend, da die Näherungslösungen nicht differenzierbar zu sein brauchen und dieser Umstand nicht überall berücksichtigt zu sein scheint. Auch bei dem Beweis des vorher angeführten Ergebnisses sind deswegen schon kleine Änderungen anzubringen.

Kamke (Tübingen).

Barbuti, Ugo: Una proprietà che caratterizza l'unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 298—303 (1949).

Unter Benutzung eines Vergleichssatzes von Baiada (dies. Zbl. 29, 260) und Cafiero (dies. Zbl. 31, 213) gibt Verf. das folgende notwendige und hinreichende Kriterium für die Eindeutigkeit der Lösung $y = f(x)$, $f(x^0) = y^0$, $a \leq x^0 < b$, der Gleichung $y' = F(x, y)$, wobei $F(x, y)$ für $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < \infty$ definiert, $F(x, \bar{y})$ in (a, b) meßbar, $F(\bar{x}, y)$ in y stetig und $|F(x, y)| \leq M(x)$ mit summierbarem $M(x)$ ist: zu jedem absolut stetigen $\Delta(x)$ in (x^0, b) , $\Delta(x) \geq 0$, $\Delta(x^0) = 0$, gibt es zwei Zahlenpaare (λ_i, l_i) ($i = 1, 2$), $x^0 \leq \lambda_i < l_i \leq b$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{l_1} [F(t, f(t) + \Delta(t)) - F(t, f(t))] dt &< \Delta(l_1) - \Delta(\lambda_1), \\ \int_{\lambda_2}^{l_2} [F(t, f(t) - \Delta(t)) - F(t, f(t))] dt &> -\Delta(l_2) + \Delta(\lambda_2). \end{aligned}$$

Als Anwendung findet Verf. leicht ein in einer früheren Note (dies. Zbl. 29, 260) aufgestelltes Eindeutigkeitskriterium wieder. Giovanni Sansone (Florenz).

Tricomi, Francesco: Un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari. Rend. Sem. mat., Torino 8, 7—19 (1949).

Die Arbeit berichtet auf Grund eines Vortrages über eine hauptsächlich Fubini zugeschriebene, aber auch sonst dem Grundgedanken nach und in mancherlei Abwandlungen schon mannigfach verwendete Methode, die als Verallgemeinerung des bekannten Liouvilleschen Verfahrens zur asymptotischen Darstellung der Eigenfunktionen eines Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems angesehen werden kann. Es braucht sich hier nicht um ein Randwertproblem, ja nicht einmal um eine lineare Differentialgleichung zu handeln. Vorgeführt wird das Verfahren jedoch am Beispiel einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung, die in der Form geschrieben wird (1) $L(y) = M(y)$, unter L, M lineare homogene Differentialausdrücke verstanden, dabei L vom höchsten Koeffizienten Eins, und so beschaffen, daß man ein Fundamentalsystem $F_1(x), F_2(x)$ von $L(y) = 0$ kennt. Faßt man (1) formal als nichthomogene Gleichung mit der rechten Seite $M(y)$ auf, so führt die Ermittlung der allgemeinen Lösung nach dem Verfahren der Variation der Konstanten schließlich auf ein System von 2 Volterraschen Integralgleichungen für je eine unbekannte Funktion

$$(2) \quad G_i(x) = \Phi_i(x) + \int_{x_0}^x K(x, \xi) G_i(\xi) d\xi,$$

worin $\Phi_i(x)$ und $K(x, \xi)$ bekannt sind, und nach deren Lösung durch schrittweise

Näherungen dann die allgemeine Lösung von (1) wird

$$(3) \quad y = \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 Y_2 \quad \text{mit} \quad (4) \quad Y_i(x) = F_i(x) + \int_{x_0}^x \left| \frac{F_1(\xi) F_2(\xi)}{F_1(x) F_2(x)} \right| G_i(\xi) d\xi.$$

Werden insbesondere die Koeffizienten von $M(y)$ wie eine Potenz eines Parameters $\nu (\rightarrow \infty)$ klein, so erhält man eine entsprechende asymptotische Darstellung für die Lösungen in Abhängigkeit von ν . Es wird dann der bekannte Sonderfall der Sturm-Liouvilleschen Probleme besprochen, dann folgen Anwendungen auf die Laguerreschen Polynome $L_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$. Im Falle $n x = O(1)$ wird eine Formel mit Fehler $O(n^{-2})$ gewonnen, die im wesentlichen der Benützung von zwei Gliedern einer früher vom Ref. angegebenen vollen konvergenten und asymptotischen Entwicklung entspricht [vgl. Math. Z., Berlin 43, 533—552 (1938), insbes. 542, Formel (16); Fortschr. d. Math. 64_I, 264—265]. Wesentlich neu sind dagegen die zum Schluß gegebenen asymptotischen Darstellungen für x in der Nähe von $4n$, wo indes die Bestimmung der Konstanten γ_1, γ_2 der Formel (3) in Abhängigkeit von n neue Methoden erfordert (siehe dies. Zbl. 34, 339). Anwendung auf die asymptotische Darstellung der kleinen und großen Nullstellen von $L_n(x)$.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Duff, G. F. D.: Factorization ladders and eigenfunctions. Canadian J. Math. 1, 379—396 (1949).

Die vorliegende Arbeit schließt sich vor allem an die diesbezüglichen Ausführungen von Schrödinger und Infeld über eine von ihnen eingeführte Spaltungsmethode für die Lösung gewisser Sturm-Liouvillescher Probleme an. Handelt es sich um die Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung unter gegebenen Randbedingungen, so läßt sie sich in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung aufspalten, wovon letztere man leicht als Rekursionsgleichungen erkennt. Mit dieser Hilfe kann man nach und nach die ganze Reihe der Lösungen konstruieren, die alle mit einem festen Eigenwert verknüpft sind. So unterscheidet Verf. zwei Klassen von Eigenfunktionenreihen ('eigenfunction ladder' genannt) — eine erste Klasse von endlichen Infeldreihen und eine zweite von unendlichen Schrödingerreihen (hierzu eine Tafel). Untersucht werden ferner auf Grund des Befundes von Stevenson und Infeld die Bedingungen, bei denen die eine Reihe oder die andere entsteht. Weiterhin wird vom Verf. auch eine Korrespondenz zwischen den Reihen entdeckt.

S. C. Kar (Calcutta).

Gennaro, Antonio de: Alcuni criteri di stabilità per le soluzioni di un'equazione differenziale lineare. Giorn. Mat. Battaglini 78, 42—54 (1948).

Verf. beweist folgenden Satz: Wenn die Funktionen $f_r(x)$ in $(0, +\infty)$ quasistetig und beschränkt sind und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_r(x) = 0$ gilt, wenn ferner die Funktionen $q_r(x)$ und $\varphi(x)$ in $(0, +\infty)$ summabel sind und $f(x)$ in $(0, +\infty)$ quasistetig und beschränkt ist, wenn schließlich die charakteristischen Zahlen der Gleichung mit periodischen Koeffizienten

$$(1) \quad \sum_{r=0}^{n-1} p_r(x) y^{(r)}(x) + y^{(n)}(x) = 0$$

negativ sind, dann hat die Gleichung

$$\sum_{r=0}^{n-1} [p_r(x) + f_r(x) + q_r(x)] y^{(r)}(x) + y^{(n)}(x) = f(x) + \varphi(x)$$

lauter stabile Integrale. Es wird auch der Fall behandelt, daß die Gleichung (1) verschwindende charakteristische Zahlen hat, und, wenn die $p_r(x)$ sich auf Konstante reduzieren, werden frühere Ergebnisse von L. Cesari, A. Ghizzetti und Ref. verschärft.

Sandro Faedo (Roma).

Leighton, Walter: On selfadjoint differential equations of second order. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 656—657 (1949).

Es werden Sätze über das asymptotische Verhalten der Lösungen $y(x)$ von $(r(x)y')' + p(x) \cdot y = 0$ ohne Beweise genannt. Schreibt man linear unabhängige Lösungen in der kanonischen Form: $u(x) \cdot \sin v(x)$ und $u(x) \cdot \cos v(x)$, so gibt es bei positivem p und mit x monoton abnehmendem $p \cdot r$ eine positive Zahl c mit $u(x) \geq c^2$ für $x \geq a > 0$. Bei $r = 1$ und $p > 0$ sei $p(x) = [q(x)]^{-4}$. Ist $Q = 1 + q^3 q''$ für großes x positiv, so gibt es bei mit x monoton wachsendem Q eine Zahl M mit: $|y(x)| \leq M \cdot q(x)$ und bei mit x monoton abnehmendem Q eine Zahl m mit: $u(x) \geq m q(x)$. Ist $x^2 \cdot p(x) - \frac{1}{4}$ eine positive monoton wachsende Funktion und $r = 1$, so ist für das oszillatorische Verhalten von $y(x)$ notwendig:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \sqrt{p(x) - 1/4 x^2} dx = \infty.$$

Collatz (Hannover).

Wintner, Aurel: A norm criterion for non-oscillatory differential equations. Quart. appl. Math. **6**, 183—185 (1948).

Aus dem Trennungssatz von Sturm folgt, daß bei stetigem $f(x)$ für $x \geq x_0$ entweder jede oder keine eigentliche Lösung der Differentialgleichung

$$Dy \equiv y'' + f(x)y = 0$$

höchstens endlich viele Nullstellen hat. Im ersten Fall heißt die Differentialgleichung nicht-oszillatorisch. Verf. beweist, daß dieser Fall genau dann vorliegt, wenn es eine Funktion $u(x) > 0$ gibt, so daß

$$\bar{u}(x) = u(x) \int_x^\infty \frac{dx}{u^2} \quad \text{und} \quad \int_x^\infty \bar{u} |Du| dx$$

existieren.

Kamke (Tübingen).

Coddington, Earl A. and Aurel Wintner: On the classical existence theorem of analytic differential equations. Amer. J. Math. **71**, 886—892 (1949).

Sia $\{\alpha_m(x)\}$ una successione di funzioni a variazione limitata in $(1, \infty)$, normalizzata con la legge $\alpha_m(1) = 0$, $\alpha_m(x-) = \alpha_m(x)$ per $1 < x < \infty$; risultino convergenti gli integrali di Laplace-Stieltjes

$$a_m(s) = \int_1^\infty e^{-sx} d\alpha_m(x), \quad [\alpha_m] = \int_1^\infty |d\alpha_m(x)|$$

ed esista un $r > 0$ tale che $\sum_{m=0}^\infty [\alpha_m] r^m < \infty$. In queste ipotesi, data l'equazione

differenziale $dw/ds = \sum_{m=0}^\infty a_m(s) w^m$ esiste un numero $l \geq 0$ tale che per $\Re s > l$ essa ammette uno ed un solo integrale $w(s)$ rappresentabile nel semipiano $\Re s > l$

con un integrale assolutamente convergente $w(s) = \int_1^\infty e^{-sx} d\beta(x)$. La funzione

incognita $\beta(x)$ viene espressa con la serie $\beta(x) = \sum_{m=1}^\infty \beta_m(x)$ nella quale il primo termine $\beta_1(x)$ è determinato dalla relazione $-x d\beta_1(x) = d\alpha_0(x)$ e i termini successivi $\beta_m(x)$ col seguente procedimento ricorrente

$$1\gamma_k(x) = \beta_k(x), \quad {}^{m+1}\gamma_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} m\gamma_j(x) * \beta_{k-j}(x), \quad -x\beta_{k+1}(x) = d \sum_{m=1}^\infty m\gamma_k(x) * \alpha_m(x)$$

avendo il simbolo $*$ il solito significato di prodotto di composizione [Faltung:

$$\lambda(x) * \mu(x) = \int_1^x \lambda(\tau) \cdot \mu(x-z) d\tau] \quad \text{ed essendo le } \beta_m(x) \text{ normalizzate. — Gli}$$

Autori osservano che il teorema vale in ipotesi analoghe per i sistemi

$$\frac{dw_i}{ds} = f_i(s, w_1, \dots, w_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad f_i = \sum_{k=0}^\infty \dots \sum_{m=0}^\infty a_i^{k \dots m}(s) w_1^k \dots w_n^m,$$

estendendo in tal modo il risultato trovato da uno di essi [A. Wintner, questo Zbl. 32, 207] nel caso dei sistemi lineari. *Giovanni Sansone* (Firenze).

Wintner, Aurel: Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range. *Duke math. J.* 15, 55—67 (1948).

I. In der Differentialgleichung (1) $(p y')' + q y = 0$ seien $p(t)$, $q(t)$ für $t \geq 0$ stetig Funktionen (die komplexe Werte haben dürfen), und es sei $p \neq 0$. (A) Ist außerdem $q \neq 0$, $\int_0^\infty \int_0^t |q(s)| ds \frac{dt}{|p(t)|} < \infty$, so hat jede Lösung von (1) für $t \rightarrow \infty$ einen Limes $y(\infty)$, und es gibt Lösungen mit $y(\infty) \neq 0$. Ist außerdem für $t \rightarrow \infty$

$$|p(t)| \rightarrow \infty, \quad \int_t^\infty \frac{du}{|p(u)|} = O\left(\frac{1}{|p(t)|}\right), \quad \int_0^t |q(u)| du = o(|p(t)|),$$

so ist für jede Lösung $y'(t) \rightarrow 0$, und es gibt genau eine Lösung y_0 mit $y_0(t) \rightarrow 0$, $p(t) y_0'(t) \rightarrow 1$. (B) Ist $\int_0^\infty \frac{dt}{|p(t)|} < \infty$ und $\int_0^\infty |q(t)| dt < \infty$, so gibt es zu jeder Lösung von (1) Konstante c_1 , c_2 , so daß (2) $y(t) \rightarrow c_1$, $p(t) y'(t) \rightarrow c_2$ ist, und zu je zwei Konstanten c_1 , c_2 gibt es genau eine Lösung $y(t)$ mit den Eigenschaften (2).

— II. Ist $f(t)$ stetig für $t \geq 0$ und $\int_0^\infty |df(t)| < \infty$, $f(\infty) > 0$, so hat $y'' - f y = 0$ eine Integralbasis y_1, y_2 mit

$$y_{1,2} \sim \exp\left(\pm \int_0^t \sqrt{f(u)} du\right), \quad y'_{1,2}/y_{1,2} \rightarrow \pm \sqrt{f(\infty)}.$$

III. Es sei $g(t)$ stetig für $t \geq 0$. A. Ist $\int_0^\infty |g(t)|^2 dt < \infty$ und (3) $\int_0^\infty |dg(t)| < \infty$, so hat (4) $y'' - (1 + g) y = 0$ eine Integralbasis y_1, y_2 mit

$$y_{1,2} \sim \exp\left(\pm t \pm \frac{1}{2} \int_0^t g(u) du\right), \quad y'_{1,2} \sim \pm (1 + \frac{1}{2} g(t)) y_{1,2}.$$

B. Gilt neben (3), daß (5) $\int_0^\infty g(t) dt$ konvergiert, so gibt es für (4) eine Integralbasis mit

$$y_{1,2} = e^{\pm t} + o(e^{\pm t}), \quad y'_{1,2} = \pm e^{\pm t} + o(e^{\pm t}).$$

Diese Aussage bleibt erhalten, wenn (3) und (5) durch $\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty$ ersetzt werden.

Kamke (Tübingen).

Wintner, Aurel: On Dirac's theory of continuous spectra. *Physic. Rev., Lancaster Pa.*, II. S. 73, 781—785 (1948).

Verf. diskutiert Diracs „propagation principle“ (vgl. P. M. A. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 2nd ed., Oxford 1935, pp. 94—93; dies. Zbl. 12, 181) auf Grund der folgenden revidierten Formulierung: ein kontinuierliches Spektrum ist entweder leer oder nichtbeschränkt. Im ersten Fall existiert das Spektrum nicht, im zweiten muß sich entweder das ganze Spektrum oder abgetrennte Teile desselben bis zu mindestens einem der beiden Energieniveaus $\varepsilon = \pm \infty$ erstrecken. Der erste Fall des rein „diskreten Spektrums“ wird durch die radiale Schrödingergleichung des dreidimensionalen harmonischen Oszillators belegt, deren Folge Laguerrescher Eigenfunktionen, obwohl diskret, ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem für $0 \leq r < \infty$ bildet. — Zur Diskussion des zweiten Falles geht Verf. von der Differentialgleichung $(p \varphi')' + (\varepsilon + q) \varphi = 0$ aus, in welcher ε

den Eigenwertparameter bedeutet und Ableitungen nach der unabhängigen Veränderlichen $0 \leq s < \infty$ durch Striche bezeichnet werden. Die Funktionen $q(s)$ und $p(s) > 0$ werden so gewählt, daß der „Grenzkreisfall“ [vgl. A. Wintner, *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 71, 547 (1947)] vermieden wird. — Verf. vermag nunmehr das Eigenwertproblem und die Randbedingung dieser Differentialgleichung mit Hilfe der Ergebnisse der Hilb-Weylschen Theorie singulärer Differentialgleichungen [vgl. E. Hilb, *Math. Ann.*, Berlin 66, 1—66 (1909); H. Weyl, *Math. Ann.*, Berlin 68, 220—269 (1910)] in das Eigenwertproblem einer gewissen Integralgleichung vom Typus

$$\varphi(s) - \varepsilon \int_0^\infty G(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

zu transformieren. In dieser Weise gelingt es, die Diskussion der Wellengleichung durch die der zugeordneten „Greenschen“ Integralgleichung zu ersetzen und das Diracsche „Propagation principle“ in der erwähnten revidierten Formulierung zu beweisen. M. Pinl (Dacca).

Levenson, Morris E.: Harmonic and subharmonic response for the Duffing equation $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos \omega t$ ($\alpha > 0$). *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. 20, 1045—1051 (1949).

Zur Untersuchung der periodischen Lösungen der Duffingschen Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cdot \cos \omega t$ werden zunächst von der dimensionslos geschriebenen Gleichung $v^2 \xi'' + \xi + \delta \xi^3 = \cos \vartheta$ [mit $\vartheta = \omega t$, $\xi'' = d^2 \xi / d\vartheta^2$] für $\delta = 0$ vier Typen periodischer Lösungen aufgestellt, dann für kleine δ nach der Störungsrechnung mit dem Ansatz:

$$\xi = \xi_0(\vartheta) + \delta \cdot \xi_1(\vartheta) + \delta^2 \cdot \xi_2(\vartheta) + \dots, \quad v = v_0 + \delta v_1 + \delta^2 v_2 + \dots$$

diese vier Typen weiter verfolgt und die zu den Anfangswerten $\xi(0) = M$, $\xi'(0) = 0$ gehörigen periodischen Lösungen für $\delta = 0, 1$ in einer v^2 - M -Ebene als Punkte einer Kurve dargestellt. Die vier Typen für $\delta = 0$ sind die „gewöhnlichen harmonischen“ für $v = \sqrt{1 - 1/M}$ ($M \neq 1$) mit der Periode 2π in ϑ , die „gewöhnlichen subharmonischen“ für $v = n$ mit der Periode $2n\pi$ in ϑ , die „ultraharmonischen“ für $v = 1/m$ (m ganz ≥ 2) mit der Periode 2π in ϑ und die „ultrasubharmonischen“ für $v = p/q$ (p, q ganz, teilerfremd, $\neq 1$) mit der Periode $2p\pi$ in ϑ . Bei festem, aber genügend kleinem δ sind periodische Lösungen in großer Zahl vorhanden. Es wird für den Fall der subharmonischen Lösungen ein Vergleich mit der Methode von Rauscher [*J. appl. Mech.*, New York 5, Nr. 4 (1938); durchgeführt, welche ein Iterationsverfahren darstellt, bei dem nicht β , sondern F als klein angenommen wird. Der Vergleich zeigt ähnliche Ergebnisse der beiden Methoden über einen größeren β -Bereich, als erwartet wurde. *Collatz* (Hannover).

Dorodnicyn, A. A.: Asymptotic solution of van der Pol's equation. *Priklad Mat. Mech.*, Moskva 11, 313—328 u. engl. Zusammenfassg. 328 (1947) [Russisch].

Es handelt sich um die in der Theorie der Relaxationsschwingungen auftretende Differentialgleichung

$$(1) \quad \ddot{x} - v(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (> 0) \quad \text{oder mit} \quad p = \dot{x}$$

$$(2) \quad p dp/dx - v(1 - x^2)p + x = 0.$$

Einer periodischen Lösung von (1) (stationäre Schwingung) entsprechen zwei sich zu einer geschlossenen Kurve der xp -Ebene zusammenschließende Lösungen von (2). Es handelt sich um deren asymptotische Bestimmung für $v \rightarrow \infty$. Ersichtlich sind die Stellen $x = \pm 1$ und die Schnittpunkte $x = \pm a$, $p = 0$ mit der x -Achse ausgezeichnet. Demgemäß wird die xp -Ebene in mehrere Gebiete aufgeteilt, und in jedem einzelnen zunächst eine formale Lösungsreihe der Gestalt $p = p(x, v)$ oder $x = x(p, v)$ mit von der jeweils anderen Veränderlichen abhängigen Koeffizienten angesetzt; diese lassen sich schrittweise durch Lösung elementarer Diffe-

rentialgleichungen berechnen. Es muß dann die asymptotische Darstellung von Lösungen durch die erhaltenen Reihen gezeigt werden. (Für $1 + \varepsilon < x < a - \varepsilon$ wird z. B., wie gezeigt wird, eine solche Lösung gegeben durch eine Lösung, die für alle $x > 0$ weiterexistiert und mit $x \rightarrow \infty$ nach Null strebt.) Die Gültigkeitsgebiete überdecken sich nun gegenseitig derart, daß die betreffenden Lösungen durch geeignete Wahl der auftretenden Konstanten zu Fortsetzungen voneinander gemacht werden können. Dies fordert ziemlich umständliche Eliminationsprozesse, die jeweils bis zu einer gewissen Gliederzahl in den asymptotischen Darstellungen durchgerechnet werden. Es ergibt asymptotisch schließlich die Schwingungsamplitude $a = a(\nu)$ (asymptotisch konstant) und die Periode $T = T(\nu)$ (asymptotisch proportional mit ν). Andeutungen für allgemeinere Relaxationsgleichungen. (Für das nicht genannte Schrifttum sei auf Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, 2. ed., Bologna 1949, Bd. II, S. 375 ff.; dies. Zbl. 33, 368 verwiesen. Ref.)
Herm. Schmidt (Braunschweig).

Ricci, Lelia: *Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo.* Rend. Sem. mat., Torino 8, 191—208 (1949).

R. Einaudi (dies. Zbl. 18, 64) hat bezüglich der Stabilität der Lösung $y = 0$ der Differentialgleichung $y'' + 2cy' + w^2(t)y = 0$, wo $c > 0$ konstant ist und $w^2(t)$ die Periode T hat, folgendes bewiesen: a) Wenn $|w(t)| < M$ ist, so ist für $c \geq M$ für jeden Wert von T $y = 0$ stabile Lösung. b) Wenn $c < M$ ist, so ist für die Stabilität von $y = 0$ notwendig und hinreichend, daß T der Bedingung genügt

$$\left| \frac{u'(T) + v(T)}{2} \right| \leq \frac{1 + e^{-2cT}}{2},$$

wo $u(t)$ resp. $v(t)$ die Fundamentalintegrale der Differentialgleichung sind, für die $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ resp. $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ gilt. Hier wird der Fall näher untersucht, daß

$$w^2(t) = \begin{cases} m^2 & \text{für } 0 \leq t < T/2 \\ M^2 & \text{für } T/2 \leq t < T \end{cases}, \quad m^2 < M^2,$$

und $w^2(t)$ die Periode T hat. Die Schranke für c in a) läßt sich dann verbessern zu

$$c^2 \geq \frac{1}{4} [2M^2 - \sqrt{(3M^2 - m^2)(M^2 + m^2)}].$$

Erfüllt ein gegebenes c bei gegebenen m , M diese letzte Ungleichung nicht, so lassen sich zwei Intervalle für T angeben, so daß $y = 0$ für diese Periode von $w^2(t)$ eine stabile Lösung ist, nämlich

$$\text{für } c < M: 0 < T \leq \frac{\pi}{\sqrt{M^2 - c^2}} \quad \text{und für } c^2 < m^2: T \geq \frac{1}{2c} \log \frac{M^2 - c^2}{m^2 - c^2}$$

$$\text{bzw. für } m^2 \leq c^2 < M^2: T \geq \frac{2}{c} \log \left\{ \frac{M^2 - m^2}{4c\sqrt{M^2 - c^2}} + \sqrt{\frac{(M^2 - m^2)^2}{16c^2(M^2 - c^2)} - 1} \right\}.$$

Am Beispiel einer axial belasteten kreiszylindrischen Schale wird die numerische Berechnung der obigen Schranken für c^2 und T numerisch durchgeführt und weiter verbessert.
R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● Sommerfeld, Arnold: *Partial differential equations in physics.* — Translated by Ernst G. Straus. New York: Academic Press Inc., 1949. XI, 335 p.; \$ 5,80.

Dufresnoy, Jacques et André Revuz: *Introduction au calcul différentiel extérieur.* Bull. Techn. Univ. Istanbul 1, 49—66 und türkische Zusammenfassg. 48 (1948).

Diese kurze Einführung in den insbesondere von E. Cartan ausgerichteten Kalkül behandelt vom Standpunkt der klassischen Analysis aus die Haupteigenschaften der Klammerausdrücke $[dx_1 dx_2 \dots dx_n]$ und der damit gebildeten Differentiale und Differentialgleichungen unter besonderer Hervorhebung der Rolle

der Funktionaldeterminanten. In einem Anhang wird die Zweckmäßigkeit der Verwendung des Kalküls in der Integralrechnung (vielfache Integrale, Kurven- und Flächenintegrale) dargetan. Volk (Würzburg).

Weil, André: Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe. Comment. math. Helvetici **20**, 110—116 (1947).

Auf einer kompakten $2n$ -dimensionalen pseudo-konformen Mannigfaltigkeit V sei eine Hermitesche Metrik $\sum g_{ik} dz_i d\bar{z}_k$ gegeben, für welche die ihr pseudo-konform invariant zugeordnete alternierende Form $\Omega = \sum g_{ik} d(z_i, \bar{z}_k)$ der Gleichung $d\Omega = 0$ genügt. Die Differentiation d , der mit $*$ bezeichnete Übergang zur dualen Differentialform, die Operation C , die jedes Monom $a d(z, \dots, \bar{z}, \dots)$ nur mit einer Potenz von $\sqrt{-1}$ multipliziert, und die alternierende Multiplikation L mit Ω erzeugen einen Operatorenring des Moduls der Differentialformen auf V . Im Falle $d\Omega = 0$ gehört der von De Rham hervorgehobene Operator $\Delta = *d*d + d*d*$ zum Zentrum jenes Operatorenrings, und es ist $*L*d - d*L* = \pm C*d*C$. Verf. bemerkt, daß zufolge dieser Relationen fast alle von Hodge bei speziellerer Metrik gewonnenen Ergebnisse bestehen bleiben, insbesondere der Satz, daß alle harmonischen Differentiale 1. Grades von den totalen Differentialen 1. Gattung und ihren Konjugierten linear abhängen. Gestützt auf die von De Rham gegebene Formulierung des Existenzsatzes für die Lösungen von $\Delta\omega = \beta$ bei gegebener Form β bestimmt Verf. alle Differentiale 1. Grades von 2. oder 3. Gattung mit gegebenen meromorphen Singularitäten θ_h ($d\theta_h = 0$) in einem V überdeckenden Umgebungensystem W_h . Zunächst wird in jedem W_h eine reguläre Differentialform ζ_h mit der Eigenschaft $\zeta_h - \zeta_k = \theta_h - \theta_k$ (in $W_h \cap W_k$) bestimmt und gezeigt, daß $\Delta\omega = \beta$ mit $\beta = \Delta\zeta_h$ (in W_h) eine in V reguläre Differentialform ω bestimmt, welche die Bildung $\psi = \omega - \zeta_h + \theta_h$ einer Lösung von $\Delta\psi = 0$ mit der Singularität θ_h erlaubt. Dann ist $\psi_1 = \frac{1}{2}(1 + iC)\psi$ eine in V reguläre Lösung von $\Delta\psi_1 = 0$ und daher harmonisch, und $\theta = \psi - \psi_1$ genügt den Gleichungen $\Delta\theta = 0$, $C\theta = i\theta$. Da θ nur die Singularitäten θ_h hat, ist $d\theta$ als reguläre Lösung von $\Delta d\theta = 0$ harmonisch. $d\theta = 0$ ist daher gleichbedeutend mit $\int_C d\theta = 0$ für alle 2-Zyklen C ,

und dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Problems. Die gegebenen Singularitäten θ_h bestimmen wegen $d\theta_h = 0$ auf V einen aus $(2n-2)$ -dimensionalen analytischen Zyklen Z_v mit Hilfe der logarithmischen Perioden γ_v von $\int d\theta_h$ zusammengesetzten „Polarzyklus“ $\sum \gamma_v Z_v$, und die Bedingung $\int_C d\theta = 0$ ist mit $Z \sim 0$ gleichbedeutend. Hierin sind der Satz von Lefschetz über die Differentiale 2. Gattung und ein tiefliegender Satz der algebraischen Flächentheorie enthalten. Die Arbeit schließt mit Hinweisen auf das Problem von Cousin und der Kennzeichnung der positiven analytischen Zyklen. Kähler.

Reeb, Georges: Quelques propriétés globales des trajectoires de la dynamique dues à l'existence de l'invariant intégral de M. Elie Cartan. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 969—971 (1949).

Gegeben sei eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit V_{2n} und auf ihr ein Vektorfeld E_1 . Folgende, für eine große Anzahl dynamischer Probleme erfüllten Voraussetzungen sollen bestehen: 1. Das Differentialsystem $dx = E_1(x) \cdot dt$ (x aus V_{2n} , t ein reeller Parameter) läßt die relative Integralinvariante $\omega = \pi + H dt$ zu, wo π eine über V_{2n} definierte Pfaffsche Form und H eine Funktion über V_{2n} ist. 2. Die Form π ist von maximaler Klassenzahl, d. h. die n -te „äußere Potenz“ $(d\pi)^n$ der alternierenden Form $d\pi$ von π verschwindet nicht in jedem Punkt von V_{2n} . 3. Das Differential dH von H verschwindet nicht in allen Punkten der Mannigfaltigkeit W_{2n-1} der Gleichung $H(x) = H_0$, wo H_0 eine gegebene Konstante ist. 4. W_{2n-1} ist kompakt. — Dann gilt der Satz: Die Trajektorien von W_{2n-1} lassen keine „kompakte

Teilung“ $W_{2(n-1)}$ zu [in einem, vom Verf. an anderem Orte definierten Sinn. Vgl. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 444—445 (1947)]. Nimmt man die weitere Voraussetzung hinzu, daß 5. für alle Werte H_0 eines bestimmten Bereichs die Trajektorien auf W_{2n-1} geschlossen sind und Elemente einer Faserung von W_{2n-1} darstellen mit der Basis $\tilde{W}_{2(n-1)}$, so gilt der weitere Satz: Es gibt über der Basis $\tilde{W}_{2(n-1)}$ von W_{2n-1} eine geschlossene alternierende Form α vom Grade 2 und maximaler Klasse.

Hardtwig (München).

Aržanyeh, I. S.: Die bezüglich Berührungstransformationen invariante Struktur von Gleichungen in Differentialen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 817—820 (1949) [Russisch].

L'A. indique une vaste classe de systèmes d'équations différentielles de 1^{ier} ordre dont la structure est invariante relativement à certaines transformations de contact. Il explicite la forme des équations transformées. J. Kravtchenko.

Zaremba, S. K.: On first integrals of differential equations. J. London math. Soc. **23**, 310—314 (1949).

Die partielle Differentialgleichung

$$(1) \quad (6xz + 4y)w_x + (6yz - 4x)w_y - 3(x^2 + y^2 - z^2 - 1)w_z = 0$$

hat u. a. folgende Eigenschaften: die Quadratsumme der Koeffizienten ist überall $\neq 0$, d. h. die Gleichung hat keine singulären Stellen; es gibt ein Gebiet $G(x, y, z)$ derart, daß jede Halbcharakteristik von (1), die von einem Punkt von G ausgeht, den Rand erreicht; (1) hat in G ein Integral mit einer singulären Stelle, d. h. ein Integral $w(x, y, z)$, für das $w_x = w_y = w_z = 0$ in einem Punkt von G ist. Kamke.

Krzyżański, Mirosław: Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales. Ann. Soc. Polonaise Math. **20**, 7—9 (1948).

Berichtigungen und Ergänzungen zu einer Note des Verf. [Ann. Soc. Polonaise Math. **18**, 145ff. (1947)]. Dadurch wird deren Ergebnis anwendbar auf die Smoluchowskische Theorie der Diffusion von Gasen [Ann. Physik **48**, 1103ff. (1915)].

Stellmacher (Göttingen).

Smolickij, Ch. L.: Über die Fastperiodizität der verallgemeinerten Lösungen der Wellengleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 353—356 (1948) [Russisch].

Es handelt sich hier um eine verallgemeinerte Lösung der Wellengleichung: $\nabla^2 \varphi - \partial^2 \varphi / \partial t^2 = 0$ für das Raumgebiet Ω unter der Bedingung: $\partial \varphi / \partial n = 0$ an der Begrenzungsfläche. Für den Fall der Grenzbedingung: $\varphi = 0$ soll eine solche Lösung in Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **49**, 12—15 (1945) von S. L. Sobolev gegeben worden sein. Ist nämlich ϱ so eine verallgemeinerte Lösung, so gilt nach Sobolev der Satz: Der Mittelwert ϱ_h hat den Kern $\varrho_h(x, y, z; t)$. Der Mittelwert ϱ_h bzw. der Kern $\varrho_h(x, y, z; t)$ werden aber definiert durch

$$(\varrho_h, \varphi) = \left(\varrho, \frac{1}{\pi h} \int_{t-h}^{t+h} \omega\left(\frac{\xi-t}{h}\right) \varphi(x, y, z; \xi) d\xi \right),$$

$$(\varrho, \varphi) = \int \int \int_{\Omega} p(x, y, z; t) \varphi(x, y, z; t) d\Omega dt,$$

was dem Ref. unklar ist, weil die Klammerausdrücke nicht die übliche Bedeutung zu haben scheinen und auch keine Erklärung finden. Die vorliegende Arbeit ist dem Beweis folgenden Satzes gewidmet: Ist ϱ die verallgemeinerte Lösung der Wellengleichung unter der Grenzbedingung: $\partial \varphi / \partial n = 0$, so hat ϱ_h noch den Kern $\varrho_h(x, y, z; t)$. Der Mittelwert aber von ϱ_h hat den Kern $\varrho_{hh}(x, y, z; t)$, wo

$$\varrho_{hh}(x, y, z; t) = \frac{1}{\pi h} \int_{t-h}^{t+h} \varrho_h(x, y, z; \xi) \omega\left(\frac{t-\xi}{h}\right) d\xi.$$

Die Fastperiodizität von $\varrho_{hh}(x, y, z; t)$ soll eine Folgerung aus einem zweiten Artikel von Sobolev [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **48**; 542—545, 618—620 (1945)] sein.

Kar (Calcutta).

Ingersoll, Benham M.: An initial value problem for hyperbolic differential equations. Bull. Amer. math. Soc. 54, 1117—1124 (1948).

Für die Differentialgleichung (1) $u_{xy} + a u_x + b u_y + c u = d$ wird in Verallgemeinerung des charakteristischen Anfangswertproblems die Aufgabe gestellt, eine Lösung zu finden, wenn etwa (2) $\frac{\partial^m u}{\partial y^m} = f(x)$ auf $y = 0$ und $\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = g(y)$ auf $x = 0$

vorgegeben sind. Verf. beweist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im wesentlichen durch eindeutige Bestimmung von u längs der Anfangscharakteristiken nur mit Hilfe von (1) und (2) unter folgenden Differenzierbarkeits-Voraussetzungen: Auf $y = 0$ sei a, b, c, d in x von der Klasse C^m ; auf $x = 0$ sei a, b, c, d in y von der Klasse C^k , entsprechend $f(x)$ und $g(y)$ von der Klasse C^{m+1} bzw. C^{k+1} . Wesentlich ist ferner die Voraussetzung des Nichtverschwindens gewisser aus den a, b, c, d und ihren Ableitungen zu bildender Determinanten. Stellmacher (Göttingen).

Bureau, Florent: Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles simplement hyperboliques, par la méthode des singularités. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 34, 480—499 (1948).

Zur Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems einer hyperbolischen Differentialgleichung wird in Anlehnung an die bekannte Methode von M. Riesz der (Hadamardsche) endliche Anteil eines divergierenden Integrales

$$J(\alpha) = \int_a^b (b-x)^\alpha A(x) dx, \quad \alpha < -1,$$

erklärt als analytische Fortsetzung dieser für $R(\alpha) > -1$ meromorphen Funktion von α . Entsprechend ist der logarithmische Anteil ($\alpha = -1, -2, -3, \dots$) bis auf das Vorzeichen das Residuum von $J(\alpha)$ an dem entsprechenden Pol. Als Anwendungsbeispiel führt Verf. für den einfachsten Fall der n -dimensionalen Wellengleichung

$$(1) \quad \square u = u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - \dots - u_{x_n x_n} = c \quad (n = 2p)$$

die durch die Hadamardsche „Methode des Hinabsteigens“ in Form eines endlichen Anteiles gewonnene Lösung in einen logarithmischen Anteil über. Ferner wird die bekannte explizite Darstellung der Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems von (1) abgeleitet. Stellmacher (Göttingen).

Bureau, Florent: La solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles, décomposable et totalement hyperbolique, d'ordre quatre et à quatre variables indépendentes. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 34, 566—592 (1948).

Für eine homogene Differentialgleichung vierter Ordnung in vier Veränderlichen mit konstanten Koeffizienten (1) $f(\xi_i) u = g(x)$, $\xi_i = \partial/\partial x_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, worin

$$f(\xi_i) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_0^2) (e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2 - e_4 \xi_0^2) \quad (0 < e_1 < e_2 < e_3 < e_4),$$

wird die anderen Ortes vom Verf. benutzte „Grundlösung“ umgeformt in ein einfaches Integral [von ähnlicher Gestalt, wie dies in der Herglotzschen Theorie der Differentialgleichung (1) für die Grundlösung der entsprechenden elliptischen Differentialgleichung herauskommt]. Die Herglotzsche Formel für die Hilfslösung der Gleichung (1) — ebenfalls in Form eines einfachen Integrales — wird wiedergewonnen. Stellmacher (Göttingen).

Élianu, Jean: Les opérateurs différentiels et la construction de la solution élémentaire des équations aux dérivées partielles polyhyperboliques dans le cas impair. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1095—1096 (1949).

Vorgelegt ist die Differentialgleichung der Ordnung $2p$

$$(1) \quad F^p u = 0 \quad (F^2 = F \cdot F, \dots, F^p = F \cdot F^{p-1}).$$

F ist ein linearer Differentialoperator 2. Ordnung, invariant geschrieben

$$F \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta + h^\alpha \nabla_\alpha + k \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n); \quad \text{Det}(g^{\alpha\beta}) \neq 0.$$

Die zu $g^{\alpha\beta}$ reziproke Matrix ist als metrischer Fundamentaltensor eines n -dimensionalen Riemannschen Raumes gedacht, in dem ∇_α kovariante Ableitung, Γ das Quadrat des geodätischen Abstandes von einem beliebigen, aber festen Punkt P bedeutet. Die Dimensionszahl $n = 2m + 1$ sei ungerade. Dann gelingt die Konstruktion einer Grundlösung der Form $u = U \Gamma^q$, in vollkommener Analogie zu der Hadamardschen Theorie ($p = 1$). U ist regulär in der Umgebung der Spitze P des charakteristischen Konoides $\Gamma = 0$ und dadurch bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Dabei ist $q = n/2 + p$. Für die Koeffizienten der Entwicklung von U nach Potenzen von Γ ergeben sich längs der Bicharakteristiken Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse mit jeweils genau einem Integral, das an der Spitze von $\Gamma = 0$ regulär ist. Der Konvergenzbeweis für die Entwicklung von u wird angedeutet. Diese Grundlösung mit algebraischer Singularität verschwindet für $n > 2p$ identisch. *Stellmacher* (Göttingen).

Élianu, Jean: Les opérateurs différentiels et la construction de la solution élémentaire des équations aux dérivées partielles polyhyperboliques dans le cas pair. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1186—1188 (1949).

Auch im Falle gerader Dimensionszahl $n = 2m$ (vgl. vorsteh. Referat) zeigt Verf., daß sich die Konstruktion der Grundlösung [der Gleichung (1) des vorigen Referates] in voller Analogie zur Hadamardschen Theorie durchführen läßt. Für $m = n/2 > p$ in der Form $u = U \cdot \Gamma^q + V \lg \Gamma$, $q = p - m$. Dabei sind U und V regulär in der Umgebung der Spitze von $\Gamma = 0$. Die Grundlösung bleibt unbestimmt bis auf eine beliebige additive, reguläre Lösung von (1). V ist regulär und eindeutig bestimmt; desgleichen die ersten $(-q)$ Glieder der Potenzreihenentwicklung von U nach Potenzen von Γ . — Im Falle $n \leq 2p$ lautet der Ansatz für die Grundlösung $u = \Gamma^q \cdot V \lg \Gamma + \text{Reguläres}$; $q = p - m$. $(\Gamma^q \cdot V)$ muß Gleichung (1) erfüllen.

Stellmacher (Göttingen).

Owens, O. G.: Uniqueness of solutions of ultrahyperbolic partial differential equations. Amer. J. Math. **69**, 184—188 (1947)

Auf der Suche nach einer Problemstellung, die für die ultrahyperbolische Differentialgleichung

$$(1) \quad L(u) \equiv \sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} - \sum_{k=1}^n u_{y_k y_k} \quad (m, n \geq 2)$$

in demselben Sinne typisch ist, wie für die total-hyperbolische Differentialgleichung das Cauchysche Anfangswertproblem und für die elliptische Differentialgleichung das Dirichletsche Randwertproblem, werden folgende Eindeutigkeitsätze bewiesen: Innerhalb der Hyperkugel V des $(n + m)$ -dimensionalen euklidischen Raumes (mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt des Koordinatensystems und dem Radius $r = (\sum x_i x_i - \sum y_k y_k)^{1/2}$) ist eine Lösung von (1) eindeutig bestimmt, wenn u auf dem Rande V^* von V vorgegeben ist, und außerdem auf dem Teil von V , wo die charakteristische Form $\sum_{i=1}^m x_i x_i - \sum_{k=1}^n y_k y_k$ zum Beispiel positiv ist, noch die zu V^* normale Ableitung von u . Ferner: Eine Lösung von (1), die innerhalb eines Hyper-Parallelepipeds existiert, das begrenzt wird von Hyper-Ebenen, parallel zu den Koordinaten-Hyperebenen, ist eindeutig bestimmt durch Vorgabe von u auf dem Rande des Parallelepipeds sowie der Normalableitung von u auf einer der $2(n + m)$ Begrenzungshyperebenen. Schließlich wird noch eine leichte Verallgemeinerung des letzten Satzes bewiesen. *Stellmacher* (Göttingen).

Eisenhart, Luther Pfahler: Separation of the variables of the two-particle wave equation. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 490—494 (1949).

Sei $r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r_2^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$, $r_3^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2$. Die Schrödingersche Wellengleichung des Zweiteilchenproblems

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) \psi + \{E - V(r_1, r_2, r_3)\} \psi = 0$$

wird unter der Voraussetzung, daß die Lösung ψ nur von r_1, r_2, r_3 abhängen soll, auf die Koordinaten r_1, r_2, r_3 transformiert. Dann werden zwei verschiedene Transformationen auf neue orthogonale Koordinaten x_1, x_2, x_3 angegeben, in denen sich die Wellengleichung separieren läßt, falls $V(r_1, r_2, r_3)$ in gewisser, aber noch recht allgemeiner Weise von r_1, r_2, r_3 abhängt. J. Meixner (Aachen).

Deny, Jacques: Les potentiels d'énergie finie. Acta math., København 82, 107—183 (1950).

L'originalité de ce travail qui poursuit largement le renouvellement, surtout par Frostman et H. Cartan, de la théorie du potentiel, consiste dans l'usage essentiel de deux instruments dont la puissance est ainsi mise en relief: les distributions de Schwartz et la transformation de Fourier généralisée par Schwartz. L'idée de l'extension apparaît clairement dans le cas particulier du potentiel ordinaire d'une distribution de masses de densité f , nulle hors d'un compact; ce potentiel w est le produit de composition $1/r * f$; la transformation de Fourier qui fait passer de $1/r$ et f à K/r^2 ($K = \text{const.}$) et une fonction \mathfrak{T} , transforme, selon ses propriétés essentielles, le produit de composition w en un produit ordinaire $K \cdot \mathfrak{T}/r^2$; l'énergie $\int w f \, d\tau$ vaut donc d'après la formule de Parseval $\int K \cdot \frac{\mathfrak{T}}{r^2} \cdot \mathfrak{T} \, d\tau$ ou $K \int \frac{|\mathfrak{T}|^2}{r^2} \, d\tau$. Cela peut s'étendre aux distributions de masses, mesures de Radon et on retrouve ainsi aussitôt la propriété fondamentale (donnée par Frostman-M. Riesz pour des mesures quelconques) du signe de l'énergie (énergie ≥ 0 , nulle seulement s'il n'y a pas de masses), base de toute extension. — Alors, plus généralement que ne l'avait envisagé Schwartz l'A. définit et étudie au chap. I le potentiel d'une distribution T , dans l'espace euclidien à $p \geq 2$ dimensions: $w = N * T$; N fixe et T variable sont des distributions assujetties à diverses restrictions (ce sont des distributions „sphériques“ admettant comme transformées de Fourier des fonctions \mathfrak{R} et \mathfrak{T} , \mathfrak{R} étant > 0 et à „croissance lente“ ainsi que son inverse). L'énergie est par définition $\int \mathfrak{R} \cdot |\mathfrak{T}|^2 \, d\tau$ et on étudie uniquement le cas d'énergie finie. On aura bien la propriété du signe de l'énergie; de plus il est immédiat que l'espace des T normé par la racine carrée de l'énergie est complet; il en est de même du sous-espace des mesures ≥ 0 ce qui généralise le résultat-clé de la théorie de Cartan (où d'ailleurs pour des mesures de signe quelconque en potentiel newtonien, il n'y avait pas complétion). On définit ensuite le produit scalaire (T_1, T_2) par $\int \mathfrak{R} \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \, d\tau$, ce qui définit une structure d'espace de Hilbert et on pourra adapter la théorie du balayage de Cartan et la recherche de la distribution d'équilibre. Cela est illustré par deux exemples nouveaux, avec le noyau $N = e^{-ar}/r$ remplaçant $1/r$ ou le noyau N de la masse ponctuelle-unité à l'origine dans quel cas la distribution d'équilibre d'un compact E est la fonction caractéristique de l'ensemble E et ce qui généralise la capacité de E est la mesure de Lebesgue de E . — Le chap. II examine le cas particulier où N est de plus une mesure > 0 ; le potentiel est alors une fonction. — On étudie le cas de validité du principe du maximum (de Frostman-Cartan) qui, avec le signe de l'énergie et le théorème de complétion constituait la base de la théorie moderne du potentiel. On y généralise un résultat d'analyse harmonique de Beurling. — Le chap. III concerne les potentiels d'ordre α (c'est à dire de noyau $r^{\alpha-p}$) de Frostman-Riesz, où le théorème de complétion pour les mesures > 0 se trouve ainsi établi même pour $\alpha > 2$, ce que n'avait pu faire Cartan qui avait besoin du principe du maximum valable seulement pour $\alpha \leq 2$. On étudie surtout le cas newtonien ($\alpha = 2$), dans l'espace à $p \geq 3$ dim.; les potentiels (d'énergie finie, pour les distributions de Schwartz envisagées) sont justement à une constante près les fonctions dans tout l'espace de la classe (BL) introduites par Beppo Levi et étudiées en 1933 par Nikodym [Fundam. Math., Warszawa 21, 129—150 (1933); ce Zbl. 8, 159]. Ces fonctions admettent presque partout un gradient et Nikodym avait montré qu'en prenant comme norme la racine carrée de l'intégrale du carré du gradient, l'espace de ces fonctions est complet. Cela va résulter maintenant de ce que cette intégrale est justement, à un facteur près, l'énergie de la distribution unique correspondante. Cette expression de l'énergie par le gradient généralise une formule élémentaire déjà étendue par G. C. Evans aux potentiels newtoniens de mesures quelconques et on obtient ainsi une certaine réciproque. Enfin, ce qui éclaire toute la théorie et a été précisément à l'origine des recherches de l'A., c'est que tous ces potentiels sont formés des potentiels newtoniens de mesures quelconques (d'énergie finie) et des potentiels des éléments introduits par complétion; ces potentiels supplémentaires s'interprètent, comme d'ailleurs les autres, comme des potentiels magnétiques, généralisant les potentiels classiques de doublets. On sait que précisément les doublets sont parmi les premiers exemples élémentaires frappants de distributions de Schwartz dont l'introduction apparaît alors comme tout à fait naturelle en théorie du potentiel. — Le chap. IV approfondit encore la cas newtonien ($p \geq 2$) par une étude locale de ces potentiels, c'est à dire des fonctions de la classe (BL). On étend et améliore des propriétés des potentiels de mesures, comme l'existence presque partout de pseudo-limite ou limite fine (Brelot-Cartan), l'existence pour les fonctions (BL) dans un domaine sphérique, de limites radiales quasi-partout (voir Beurling-Dufresnoy dans le plan). On étudie enfin les potentiels de Green d'énergie finie

dans un domaine, en donnant une décomposition canonique des fonctions (BL) analogue à celle de F. Riesz pour les fonctions sousharmoniques et en généralisant un résultat de Ahlfors (ce Zbl. **30**, 389) donné dans le plan pour les fonctions (BL) continûment différentiables.

Brelot (Grenoble).

Fichera, Gaetano: Proprietà di media toroidali delle funzioni armoniche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 431—435 (1949).

L'A. étudie les fonctions harmoniques en coordonnées toroïdales, donne deux théorèmes de moyenne et une résolution explicite du problème de Dirichlet pour le tore.

Brelot (Grenoble).

Titchmarsh, E. C.: Eigenfunction expansions for a finite two-dimensional region. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **20**, 238—253 (1949).

On considère un domaine plan borné D de frontière assez régulière, $q(x, y)$ pourvu de gradient continu dans D et l'équation $\Delta q + (\lambda - q(x, y))q = 0$. On cherche à développer les fonctions dans D en séries de fonctions orthogonales qui soient „fonctions propres“ de (1), c'est à dire les solutions à un facteur près, nulles à la frontière, pour des valeurs λ (formant d'ailleurs une suite λ_n). Partant du cas simple et classique où le domaine est un carré, on s'y ramène en remplaçant q par un polynôme $q^{(v)}$ qui converge vers q uniformément dans D et vers ∞ hors D . On cherche les fonctions propres avec ce $q^{(v)}$ et un carré fixe contenant D et la difficulté consiste dans le passage à la limite qui conduit au résultat.

Brelot (Grenoble).

Verblunsky, S.: Sur les fonctions préharmoniques. Bull. Sci. math., II. S. **73**_I, 148—152 (1949).

L'A. démontre la proposition suivante énoncée comme vraisemblable par M^{lle} Ferrand [Bull. Sci. math. **68**, 152—181 et spéc. p. 168 (1944)]: si f est préharmonique sur un réseau plan à mailles carrées contenu dans un domaine, la différence des valeurs de f en P, Q contigus est bornée en module par k/p , où k est une constante (ne dépendant pas de f, P, Q) et p le nombre minimum de pas menant de P à la frontière.

Brelot (Grenoble).

Bonsall, F. F.: Note on a theorem of Hardy and Rogosinski. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **20**, 254—256 (1949).

L'A. donne une démonstration plus simple du théorème de Hardy-Rogosinski affirmant que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$, où f est bornée supérieurement et sousharmonique dans la bande $(\alpha < x < \beta, y > \gamma)$, est $-\infty$ ou convexe. Mais, en s'appuyant sur la théorie moderne du potentiel. Deny et Lelong ont déjà donné une démonstration presque immédiate et qui fournit une extension à n variables [Bull. Soc. math. France **75**, 89—112 (1947); ce Zbl. **33**, 64].

Brelot (Grenoble).

Variationsrechnung:

Magenes, Enrico: Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli. I. Condizioni sufficienti per la semicontinuità. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. **2**, 1—38 (1950).

Es werden die Integrale der Variationsrechnung

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz,$$

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y'_1(x), y'_2(z)) dx dz$$

betrachtet, für die S. Faedo [Ann. Mat. pura appl., Bologna **23**, 69—121 (1944); Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat. **4**, 223—249 (1943)] notwendige

Bedingungen für die Halbstetigkeit und hinreichende Bedingungen für die Stetigkeit aufgestellt hat. In der vorliegenden Arbeit stellt Verf. hinreichende Bedingungen für die Halbstetigkeit von $I(y)$ und $I(y_1, y_2)$ auf, von denen wir die folgende anführen: Es sei $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ eine samt ihren partiellen Ableitungen $f_{y'_1}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_2 y'_2}$ für jedes Paar endlicher Werte y'_1, y'_2 und jeden Punkt (x, z, y_1, y_2) des Bereichs $A = A_1 \times A_2$ definierte und stetige Funktion; dabei sind A_1 und A_2 zwei Punkt-mengen, die der (x, y_1) - bzw. der (z, y_2) -Ebene angehören und ihre im endlichen gelegenen Häufungspunkte enthalten, und es wird vorausgesetzt: 1. in allen Punkten des Bereichs A gilt für jedes Paar endlicher Werte y'_1, y'_2 : $f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0$, $f_{y'_2 y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0$; 2. es gibt zwei Bereiche A'_1, A'_2 , die alle Punkte von A_1 bzw. A_2 im Innern enthalten, derart, daß, wenn man $A' = A'_1 \times A'_2$ setzt, in $A' - A'$ für jedes Paar endlicher Werte y'_1, y'_2 die Funktion $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ so definiert werden kann, daß sie samt ihren partiellen Ableitungen $f_{y'_1}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_2 y'_2}, f_{y'_1 x}, f_{y'_2 x}$ stetig wird in jedem Punkte $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$, wo (x, z, y_1, y_2) zu A' gehört und y'_1, y'_2 beliebige endliche Zahlen sind; 3. für jeden beschränkten Teil \bar{A}' von A' können zwei Zahlen $v_1 > 0$, $Y' \geq 1$ und vier samt ihren partiellen Ableitungen $\partial Q/\partial x, \partial R/\partial z, \partial^2 S/\partial x \partial z, \partial P/\partial y_1, \partial Q/\partial y_1, \partial R/\partial y_1, \partial S/\partial y_1$ in \bar{A}' stetige Funktionen $P(x, z, y_1, y_2), Q(x, z, y_1, y_2), R(x, z, y_1, y_2), S(x, z, y_1, y_2)$ gefunden werden, derart, daß, wenn man mit \bar{A} den in A' enthaltenen Teil von A bezeichnet, $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2$ in \bar{A} für jedes Paar y'_1, y'_2 , sowie $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2) \geq v_1 |y'_2|$ in \bar{A} für jedes y'_1 und $|y'_2| \geq Y'$ gilt; 4. es existieren stetige partielle Ableitungen f_{y_1}, f_{y_2} in jedem Punkt $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ mit (x, z, y_1, y_2) in A' und beliebigen endlichen Werten y'_1, y'_2 . Unter diesen Voraussetzungen ist das Funktional $I(y_1, y_2)$ von unten halbstetig in der Klasse der Kurven $\{y_1 = y_1(x) (a \leq x \leq b), y_2 = y_2(z) (c \leq z \leq d)\}$ mit absolut stetigen $y_1(x), y_2(x)$ von der Eigenschaft, daß $I(y_1, y_2)$ existiert und einen endlichen Wert hat.

S. Cinquini (Pavia).

Faedo, S.: Una osservazione sul metodo di Ritz. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 2, 85—97 (1950).

Verf. betrachtet das Integral in der gewöhnlichen Form

$$I(y) = \int_a^b f[x, y(x), y'(x)] dx$$

in einer Klasse Γ von Funktionen $y(x)$, die, ebenso wie $y'(x)$, im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig sind. Er setzt Γ als abgeschlossen und kompakt von erster Ordnung voraus, indem er also als Abstand zwischen zwei Elementen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ von Γ das $\max_{a \leq x \leq b} \{|y_1(x) - y_2(x)| + |y'_1(x) - y'_2(x)|\}$ annimmt. Er zeigt, daß das Aufsuchen der Extremalen von $I(y)$, bei dem man nicht auf die klassischen Eulerschen Verfahren zurückgreifen kann, mit der Methode von W. Ritz durchgeführt werden kann (vgl. z. B.: Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Berlin 1931, Kap. IV, § 2, Nr. 2; dies. Zbl. I, 5), auch wenn $f(x, y, y')$ nicht quadratisch in y und y' ist, wofern man nur die Klasse Γ geeignet spezialisiert. — Bei den verschiedenen Beispielen des Verf. wird immer $y(x)$ als mit einer in $[a, b]$ quadratisch summierbaren zweiten Ableitung versehen vorausgesetzt; im besonderen wird vorausgesetzt: $\int_a^b y''^2(x) dx \leq L$ (mit von $y(x)$ unab-

hängiger Konstante L), oder $\int_a^b \vartheta(x) y''^2(x) dx \leq L$ (mit $\vartheta(x) > 0$ und stetig in $[a, b]$), oder $|y''(x)| \leq L$ in $[a, b]$, oder $|y''(x)| \leq K(x)$ (mit $K(x) > 0$ und quadratisch summierbar in $[a, b]$).

Tullio Viola (Rom).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Berti, Giuliana: Qualche proprietà di alcuni operatori introdotti dal Volterra. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 279—281 (1949).

L'A. considère les opérateurs

$$C_r f(t) = c_r f(t) + \int_0^t \gamma_r(t, \tau) f(\tau) d\tau \equiv [c_r, \gamma_r]$$

introduits par Volterra (Leçons sur les fonctions de lignes, Paris 1913). Après avoir défini la somme de deux quelconques de ces opérateurs C_r et C_s ($(C_r + C_s) = [c_r + c_s, \gamma_r + \gamma_s]$), leur produit $[(C_r C_s) f(t) \equiv C_r(C_s f(t))]$ et C_r^{-1} , l'A. trouve que l'on a $C_r C_s = [c_r c_s, c_r \gamma_s + c_s \gamma_r + \dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s]$ (où l'on a posé suivant

Volterra $\dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s = \int_{\tau}^t \gamma_r(t, \xi) \gamma_s(\xi, \tau) d\xi$) et montre que ces opérations jouissent de la

propriété associative et distributive. — S'il est $\dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s = \dot{\gamma}_s \dot{\gamma}_r$, comme il arrive s'il est (Volterra) $\gamma_r(t, \tau) = \bar{\gamma}_r(t - \tau)$ et $\gamma_s(t, \tau) = \bar{\gamma}_s(t - \tau)$, on a en outre $C_r C_s = C_s C_r$.
F. Pellegrino (Roma).

Rothe, E. H.: Weak topology and nonlinear integral equations. Trans. Amer. math. Soc. 66, 75—92 (1949).

Die Arbeit knüpft an die von A. Hammerstein [Acta math., Uppsala 54, 118—176 (1930)] inaugurierte und von M. Golomb [Math. Z. 39, 45—75 (1934) und Publ. math. Univ. Belgrade 5, 52—83 (1936); dies. Zbl. 9, 312, 17, 404] weitergeführte Existenz- und Eindeigkeitstheorie im Großen für nichtlineare Integralgleichungen und Systeme von solchen an und behandelt die Existenzfrage (unter Beiseitelassung der Eindeigkeitsfrage) vom Standpunkt der „schwachen“ Topologie in einem geeigneten Funktionenraum. Die zentrale Rolle spielen zwei Funktionale $i(x)$, $i^*(x)$, die eine Verallgemeinerung der von Hammerstein betrachteten Integrale

$$i(x) = \frac{1}{2} \iint K(s, t) x(s) x(t) ds dt + \int F\left(t, \int K(t, s) x(s) ds\right) dt = \frac{1}{2} \|x\|^2 + J(x)$$

darstellen. Ohne die von Hammerstein benutzten Voraussetzungen, daß $K(s, t)$ symmetrisch und positiv-definit sei, werden Bedingungen dafür angegeben, daß $J(x)$ und $J^*(x)$ in jeder Kugel $\|x\| \leq R$ ein Maximum und ein Minimum und daß $i(x)$ und $i^*(x)$ ein Minimum annehmen. Die Punkte, wo die Extrema angenommen werden, können auf der Begrenzung der Kugel liegen. Fügt man jedoch die Verallgemeinerung einer von Hammerstein eingeführten Bedingung hinzu, so müssen diese Punkte bei hinreichend großer Kugel im Innern liegen. Dann muß aber dort das Fréchet'sche Differential $d(x, h)$ von $i(x)$ für alle h verschwinden, woraus die Existenz einer Lösung der Integralgleichung

$$y(s) + \int K(s, t) f(t, y(t)) dt = 0$$

bzw. eines entsprechenden Systems solcher Gleichungen folgt, weil $d(x, h)$ als skalares Produkt einer „beliebigen“ Funktion und der linken Seite der Integralgleichung geschrieben werden kann.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

● **Parodi, Maurice:** Applications physiques de la transformation de Laplace. Préface de M. Joseph Pérès. (Centre National de la Recherche Scientifique. Centre d'Études Mathématiques en vue des applications, B. Méthodes de calcul.) Paris: C. N. R. S. Éditeur Dépositaire: Gauthier-Villars. 1948. VIII, 177 p. 800 fres.

Das Centre d'Études Mathématiques en vue des applications, eine Gründung des Centre National de la Recherche scientifique (Frankreich), strebt die Herstellung von mathematischen Werken an, die unmittelbar der Praxis der Ingenieure und Physiker dienen sollen. Zu diesem Zweck soll ein Handbuch der wichtigsten Gebiete geschaffen werden, das durch einzelne Monographien vorbereitet und vervollständigt werden soll. Das vorliegende Buch ist die erste dieser Monographien. Das 1. Kap. stellt die wichtigsten Eigenschaften der Laplace-Transformation zusammen, wobei der Verf. sich nach dem Vorbild von G. und R. Julia [Bull. Soc. franç. Electr.

6, 975 (1936)] auf solche Originalfunktionen $f(t)$ beschränkt, für die die 3. Ableitung für $t > 0$ stetig ist, während f, f' und f'' für $t \rightarrow 0$ Grenzwerte haben; ferner soll $\lim_{t \rightarrow \infty} f''(t) e^{-\lambda t} = 0$ für jedes $\lambda > 0$ sein. Diese sehr starke Einschränkung wird gemacht, um die komplexe Umkehrformel leicht beweisen zu können. Die folgenden Kapitel behandeln folgende Themen: 2. Kap. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Kap. Partielle Differentialgleichungen, 4. Kap. Berechnung von bestimmten Integralen und Herleitung von Eigenschaften spezieller Funktionen (Gammafunktion, Laguerresche Polynome, Besselsche Funktionen) mittels Laplace-Transformation, 5. Kap. Integral- und Integraldifferentialgleichungen, 6. Kap. Die Volterra'sche Komposition, 7. Kap. Elektrische Netze (Systeme von Differentialgleichungen). Zum Schluß wird eine graphische Methode zur Herstellung der Faltung zweier Funktionen angegeben. Bei der geringen Verbreitung, die die Methode der Laplace-Transformation als Ablösung des Heaviside-Kalküls bisher in Frankreich im Gegensatz zu den anglo-amerikanischen Ländern gefunden hat, ist das Erscheinen dieser Einführung in die Methode zu begrüßen. *Doetsch.*

Edwards, R. E.: A Tauberian theorem. J. London math. Soc. **24**, 223—229 (1949).

Ist $Q(t)$ in $(-\infty, \infty)$ beschränkt und meßbar, so handelt es sich darum, Bedingungen zu finden, unter denen aus $\lim_{x \rightarrow a - \infty} \int_a^\infty f(x-t) Q(t) dt = 0$ für eine Funktion $f(t)$ aus $L^1(-\infty, \infty)$ die Relation $\lim_{x \rightarrow a - \infty} \int_a^\infty g(x-t) Q(t) dt = 0$ für alle Funktionen $g(t)$ aus $L^1(-\infty, \infty)$ folgt. Der Wiener'sche Satz besagt, daß im Falle $a = \infty$ eine notwendige und hinreichende Bedingung darin besteht, daß die Fourier-Transformierte von $f(t)$ nirgends verschwindet. Dieser Satz ergibt sich daraus, daß diese Bedingung dafür notwendig und hinreichend ist, daß der lineare Raum der Translationen von $f(t)$ in L^1 überall dicht ist und daß $a = \infty$ der einzige invariante Punkt bei diesen Translationen ist. Verf. behandelt den Fall $a \neq \infty$ und leitet zunächst folgenden Satz ab: \mathfrak{F} bedeute die Klasse der Fourier-Transformierten von Funktionen aus L^1 . Ist $\varphi(t)$ eine Funktion aus L^p ($1 \leq p < \infty$), die fast überall nicht 0 ist, so sind die Funktionen $\varphi(t) F(t)$, wo F in ganz \mathfrak{F} variiert, überall dicht in L^p . — Hieraus ergibt sich folgender Satz: Es sei $1 \leq p < \infty$ und $1. \varphi(t) \in L^p$ reellwertig und von 0 verschieden für fast alle t , 2. $Q(t) \in L^q$, wo $1/p + 1/q = 1$, reellwertig und so beschaffen, daß für eine Folge von reellen Zahlen x_n die Funktion $\varphi(x_n - t) Q(t)$ konstantes Vorzeichen in $-\infty < t < \infty$ hat (wobei das Vorzeichen von n abhängen kann), 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \varphi(x_n - t) Q(t) dt = 0$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \psi(x_n - t) Q(t) dt = 0$ für alle Funktionen $\psi(t) \in L^p$. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Haviland, E. K.: A note on Laplace transforms of functions whose spectra are confined to a given set. Amer. J. Math. **69**, 279—285 (1947).

Der Hausdorff-Bernsteinsche Satz über die Darstellbarkeit von vollmonotonen Funktionen durch Laplace-Stieltjes-Integrale mit nichtabnehmender Belegungsfunktion $\beta(t)$ wird erweitert auf den Fall, daß das Spektrum von $\beta(t)$ auf eine vorgeschriebene Teilmenge des Intervalls $[0, \infty)$ beschränkt ist. Unter dem Spektrum von $\beta(t)$ wird die Menge von Punkten τ verstanden, die die Eigenschaft haben, daß $\beta(t_2) - \beta(t_1) > 0$ ausfällt für jedes Wertepaar t_1, t_2 mit $t_1 < \tau < t_2$. Das Hauptresultat lautet: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$

in der Form $f(x) = \int_0^\infty e^{-xu} d\beta(u)$ darstellbar ist, wo $\beta(u)$ beschränkt und nicht abnehmend, sein Spektrum auf die Untermenge Γ von $[0, \infty)$ beschränkt ist und das Integral für $0 \leq x < \infty$ konvergiert, besteht darin, daß $f(x)$ vollmonoton in $[0, \infty)$ ist und daß, wenn $a_0 + a_1 e^{-u} + \dots + a_n e^{-nu}$ ein beliebiges, auf Γ nicht negatives

Exponentialpolynom ist, der Wert

$$a_0 f(x) + a_1 f(x+1) + \cdots + a_n f(x+n) \geq 0$$

für alle $x \geq 0$ ausfällt. — Für den Fall $\Gamma = [0, 1]$ gilt der Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß $f(x)$ in obiger Form darstellbar ist, wobei $\beta(u)$ nicht abnehmend ist und sein Spektrum auf $[0, 1]$ beschränkt ist, besteht darin, daß $f(x)$ vollmonoton in $x > 0$ ist und daß die Bedingung

$$(-1)^m \Delta_j^m \{ \Delta_v^n [e^v f(x+j+v)] \} \geq 0$$

für $m, n = 0, 1, \dots$ und $x > 0$ gilt.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Wintner, Aurel: On the Laplace-Fourier transcendents occurring in mathematical physics. Amer. J. Math. 69, 87—98 (1947).

Die klassische Laplacesche Methode der Integration einer gewöhnlichen, linearen, homogenen Differentialgleichung (2-ter Ordnung) besteht darin, die Lösung in Gestalt eines Integrals $\int e^{tr} \varphi(r) dr$ anzusetzen und dann den komplexen Integrationsweg und die Funktion $\varphi(r)$ so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung erfüllt ist, was zwar theoretisch elegant, aber eigentlich nur in den wenigen Fällen der klassischen Transzendenten der mathematischen Physik, wie z. B. den Besselfunktionen, wirklich praktisch durchgeführt worden ist. Verf. beweist nun, daß in einem sehr allgemeinen Fall a priori festgestellt werden kann, daß als Integrationsweg die positive reelle bzw. imaginäre Achse brauchbar ist und daß dabei die Funktion $\varphi(r)$ positiv ausfällt. Eine explizite Darstellung für $\varphi(r)$ wird dabei nicht mitgeliefert. Ferner muß das Integral gegebenenfalls in einem etwas allgemeineren Sinn verstanden werden. Die Erörterungen beziehen sich auf die normalisierte selbstadjungierte Form der Differentialgleichung $x'' + f(t)x = 0$. Der erste Satz lautet: Wenn $f(1/z)$ eine gerade, ganze Funktion in z und $(-1)^n d^n f(it)/dt^n \geq 0$ für $0 < t < \infty$, $n = 0, 1, \dots$ (also z. B. wenn $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n / z^{2n}$ mit $a_n \geq 0$) ist, so hat die Differentialgleichung eine „Fourierlösung“ der Form

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon r} e^{itr} d\varphi(r) \text{ für } 0 < t < \infty,$$

wo $\varphi(r)$ eine monotone, aber nicht notwendig beschränkte Funktion in $0 \leq r < \infty$ ist. — Dies ergibt sich durch Ersatz der reellen Werte durch komplexe und Grenzübergang gegen den Rand der Konvergenzhalbebene aus folgendem Satz: Wenn $f(t)$ in $t > 0$ Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt, welche die Bedingung $(-1)^n f^{(n)}(t) \leq 0$ erfüllen, so besitzt die Differentialgleichung eine „Laplace-Lösung“ der Form

$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{-tr} d\varphi(r), \quad 0 < t < \infty,$$

wo $\varphi(r)$ eine monotone, nicht notwendig beschränkte Funktion in $r \geq 0$ ist. Auf Grund des Hausdorff-Bernsteinschen Satzes kann man dies so ausdrücken: Wenn $-f$ vollmonoton ist, so hat die Gleichung eine vollmonotone Lösung. Dies wiederum folgt aus dem Satz: Wenn $f(t)$ die Bedingungen $(-1)^n f^{(n)}(t) \leq 0$ für $n = 0, 1, \dots, m$ erfüllt, so hat die Gleichung eine Lösung, welche die Bedingungen $(-1)^n x^{(n)}(t) \geq 0$ für $n = 0, 1, \dots, m+1$ erfüllt. Dies ergibt sich leicht durch vollständige Induktion, weil der Fall $m = 0$ im wesentlichen mit einem Ergebnis von A. Kneser [J. reine angew. Math. 116, 178—212 (1896)] übereinstimmt. Doetsch.

Ghizzetti, A.: Condizioni necessarie e sufficienti per i momenti di una funzione limitata. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 2, 533—536 (1947).

Es handelt sich um die Frage der Existenz einer Funktion $f(x)$, die im endlichen Intervall $a \leq x \leq b$ den Ungleichungen $0 \leq f(x) \leq 1$ genügt, und die vorge-

schriebenen Momente

$$(*) \quad \int_a^b x^k f(x) dx = \mu_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

besitzt. In einer früheren Arbeit [Accad. Ital. Mem. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VII. S. 13, 1165—1199 (1943)] hat Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt (und zwar auch für unendliche Intervalle), daß eine Funktion existiert, die (*) für $k = 0, 1, \dots, m$ erfüllt (m fest). Diese besagen im wesentlichen das Nicht-Negativ-Werden gewisser ganz-rational von den μ_k abhängiger Hankelscher Determinanten der Form $\det(\sigma_{\kappa+\lambda-2})$, $1 \leq \kappa, \lambda \leq k+1$, worin die „Bimomente“ σ_κ durch die formale Identität $\exp\left(-\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \cdot z^{j+1}\right) = 1 - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sigma_\kappa z^{\kappa+1}$ erklärt sind,

sowie der entsprechenden Determinanten, die durch Streichung der letzten Zeile und Hinzufügung von $(1, \xi, \dots, \xi^k)$ für $\xi = a, b$ als neuer erster bzw. letzter Zeile daraus hervorgehen. Die Gesamtheit dieser Bedingungen ist für das jetzige Problem jedenfalls notwendig. Zur tatsächlichen Konstruktion einer Lösung, werden für $m = 2n-1$ ($n = 1, 2, \dots$) Lösungen $f_n(x)$ aufgestellt, die stückweise 0 oder 1

sind, und es wird die zugehörige Folge der Integrale $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ gebildet.

Aus ihr läßt sich eine gegen eine monoton wachsende, also fast überall differenzierbare Grenzfunktion $F(x)$ konvergente Teilfolge gewinnen, die nun $\int_a^b x^k dF = \mu_k$

für alle k erfüllt, womit die Aufgabe gelöst ist; die Eindeutigkeit folgt aus einem bekannten Satz von Lerch. Hinweis auf eine andere und weniger einfach gewonnene, abweichende Form der Bedingungen bei Hausdorff, Math. Z. 16, 220—248 (1923).

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Mandelbrojt, S.: Théorèmes d'unicité. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 65, 101—138 (1948).

Verf. benutzt zwei in einer früheren Arbeit [Ann. sci. École norm. sup., III. S. 63, 351—378 (1947)] bewiesene Sätze (in der gegenwärtigen Arbeit in präzisierter Form als Théorème préliminaire I, II, S. 111, bezeichnet), um Eindeutigkeitssätze über die Approximation durch Polynome in $-\infty < x < +\infty$, über die Bestimmung der iterierten Kerne einer Integralgleichung vom Carlemanschen Typ und über gewisse Momentenprobleme zu beweisen. Da die Voraussetzungen der allgemeinen Approximationssätze sehr weitläufig sind, seien hier nur zwei Korollare aufgeführt, die die Richtung der Untersuchung hinreichend charakterisieren. — 1. Es sei $F(x)$ stetig, positiv und gerade, $\log F(x)$ eine konvexe Funktion von

$\log x$ ($x > 0$), ferner $\int_0^\infty [\log F(x)]/x^2 dx = \infty$. Dann ist die Folge $\{x^n/F(x)\}$ ($n \geq 0$) abgeschlossen auf $-\infty < x < +\infty$ hinsichtlich jeder Lebesgueschen Klasse L_p ($1 \leq p \leq \infty$). — 2. Wenn $F(x)$ außerdem wachsend und differenzierbar und $F'(x) = O(F^2)$ ist, dann gehört zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ mit $f(x) = o(F(x))$

für $|x| \rightarrow \infty$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P(x) = a_0 + \sum_1^m a_n x^n$ mit der Eigenschaft $|f(x) - P(x)| < \varepsilon F(x)$ in $-\infty < x < +\infty$. — Die Sätze über die iterierten Kerne $K^{(n)}$ haben, grob ausgesprochen, folgenden Charakter: $K(x, y)$ sei ein reeller, symmetrischer (singulärer) Kern, der gewisse, von Carleman (Uppsala Univ. Årsskr. 1923) eingeführte Eigenschaften hat. Die Folge $\{k_n\}$ enthalte alle positiven geraden Zahlen, $\{\lambda_n\}$ sei die komplementäre Folge hinsichtlich $n \geq 2$. Es sei $K^{(k_n)}(x_0, y_0) = 0$ ($n \geq 1$). Wenn die λ_n gewisse Dichtigkeitsbedingungen erfüllen, so ist $K^{(p)}(x_0, y_0) = 0$ ($p \geq 2$). — Die Sätze des letzten Abschnitts beziehen sich auf das Stieltjessche ($0 \leq t < \infty$) und Hamburgersche ($-\infty < t < +\infty$) Momentenproblem und verallgemeinern die Ergebnisse von Carleman, Boas

[Trans. Amer. math. Soc. **61**, 54—68 (1947); dies. Zbl. **32**, 61] und Fuchs [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 1057 (1946)]. Es handelt sich um folgendes: Es existiere eine wachsende Funktion $V(t)$ mit $\int_0^\infty t^{k_n} dV = M_n$ ($n \geq 0$), wo $\{k_n\}$ eine Folge von ganzen Zahlen mit $k_0 = 0$ und $\{M_n\}$ eine positive Folge ist. Es sind Bedingungen für die k_n und M_n zu formulieren, unter denen die Funktion $V(t)$ mit $V(0) = 0$ eindeutig ist. Entsprechend für das Momentenproblem im Intervall $-\infty < t < +\infty$. Verf. gibt solche Bedingungen auf Grund seines Théorème préliminaire I in Gestalt von Dichtigkeitsvoraussetzungen an. *Doetsch* (Freiburg).

Agmon, Shmuel: Sur deux théorèmes de M. S. Mandelbrojt. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1835—1837 (1949).

L'A. étend au cas des exposants non-entiers les résultats de Mandelbrojt (v. référence précédente) et du rapporteur [C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1074—1076 (1948)] concernant l'approximation polynomiale sur une demi-droite et le problème des moments généralisé de Stieltjes. *Horváth* (Paris).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Riss, J.: La dérivation dans les groupes abéliens localement compacts. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 664—666 (1948).

Riss, J.: Les distributions dans les groupes abéliens localement compacts. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 809—810 (1948).

Riss, J.: Sur la dérivation dans les groupes abéliens localement compacts. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1194—1195 (1948).

Riss, J.: Transformation de Fourier des distributions. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 12—14 (1949).

L'A. généralise la dérivation des fonctions et les distributions [cf. L. Schwartz, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math.-phys., n. S. **21**, 57—74 (1945)] aux groupes abéliens localement compacts. Soit G un groupe abélien localement compact, \hat{G} son dual. $\text{Hom}(R, G)$ et $\text{Hom}(\hat{G}, R)$ sont isomorphes à un R^I ; la réunion des $r(R)$ [$r \in \text{Hom}(R, G)$] est un sous-groupe partout dense dans la composante connexe de 0 de G . Une fonction complexe définie dans G est dite dérivable suivant $r \in \text{Hom}(R, G)$ en $x \in G$ si $d_r f(x) = d(f(x + r(t))/dt)$ ($t = 0$) existe. On désigne par \mathcal{E} (resp. $\mathcal{D}_c, \mathcal{D}$) l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à dérivées continues (resp. et à support $\subset C$, et à support compact); il existe des $f \in \mathcal{E}$ à support arbitrairement petit et des partitions de l'unité formées de fonctions de \mathcal{E} ; \mathcal{E} est partout dense dans $\mathcal{E}_c(G, C)$. Si $f \in \mathcal{D}$, l'ensemble des r tels que $d_r f = 0$ est un sous-espace R_f de $\text{Hom}(R, G)$, f est constante sur les classes mod. le sous-groupe fermé H_f engendré par les $r(t)$ ($r \in R_f$); par passage au quotient, f est une fonction indéfiniment dérivable sur G/H_f et $\text{Hom}(R, G/H_f)$ et $\text{Hom}(R, G)/R_f$ sont isomorphes et de dimension finie. Les dérivations engendrent une algèbre d'opérateurs sur \mathcal{D} (ou \mathcal{E}) et on a $\mathcal{I} \cdot d_r = -2\pi i \hat{r} \cdot \mathcal{I}$ [\mathcal{I} étant la transformation de Fourier sur G et $\hat{r} \in \text{Hom}(\hat{G}, R)$ la transposée de r]; $r \mapsto -2\pi i r$ définit ainsi un isomorphisme de l'algèbre des opérateurs de dérivation sur l'algèbre des polynômes sur $\text{Hom}(\hat{G}, R)$. Si C est un compact $\subset G$, on munit \mathcal{D}_c de la topologie de convergence uniforme pour les fonctions et leurs dérivées; par définition, les distributions sur G sont les éléments de l'espace \mathcal{D}' des formes linéaires sur \mathcal{D} , continues sur les \mathcal{D}_c . \mathcal{D}' est muni de la topologie de convergence compacte; \mathcal{E} est alors partout dense dans \mathcal{D}' et ceci permet de prolonger à \mathcal{D}' des notions définies sur \mathcal{E} ; en particulier on pose $d_r T = T \cdot d_r$ ($T \in \mathcal{D}'$) et les opérateurs de dérivation opèrent ainsi sur \mathcal{D}' . Dans tout \mathcal{D}_c , une distribution est combinaison linéaire de dérivées de mesures de Radon. Toute distribution possède un support; si T est une distribution à support compact K , il existe un système fini S d'opérateurs de dérivation tel que, si $Df = 0$ sur K pour tout $D \in S$, alors $T(f) = 0$; en particulier, toute distribution à support ponctuel est combinaison linéaire de dérivées de mesures de Dirac. Soit $L(G)$ l'espace des fonctions continues sommables ainsi que leurs transformées de Fourier (normé par $\|f\| = \|f_1\| + \|\mathcal{I}f\|_1$), $\mathcal{E}(G)$ l'espace des f telles que $P \cdot D \cdot f \in L(G)$ et $\hat{P} \cdot \hat{D} \cdot \mathcal{I}f \in L(G)$, quels que soient les opérateurs de dérivation D et \hat{D} et les polynômes P et \hat{P} [sur $\text{Hom}(G, R)$ et $\text{Hom}(\hat{G}, R)$] (muni de la topologie définie par les semi-normes $\|P \cdot D \cdot f\|$). \mathcal{I} est un isomorphisme de $\mathcal{E}(G)$ sur $\mathcal{E}(\hat{G})$, dont l'isomorphisme réciproque est la transformation de Fourier $\tilde{\mathcal{I}}$ sur \hat{G} . $\mathcal{E}(G)$ est partout dense dans $L(G)$ et toute fonction de $\mathcal{E}(G)$ est, pour tout

$a \in G$, limite de la somme d'une suite de fonctions nulles sur des voisinages de a et d'une suite de polynômes trigonométriques; ceci permet en particulier de faire la théorie des idéaux premiers de $L(G)$ [et par suite de $L^1(G)$] [cf. I. Kaplansky, Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 133—136 (1949); cf. Zbl. **32**, 29]. Les distributions tempérées sur G sont par définition les éléments de l'espace \mathcal{S}' des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(G)$; elles sont de la forme $T(f) = \int P \cdot D \cdot f(x) \omega(x) dx + \int \tilde{P} \cdot \tilde{D} \cdot \mathcal{F} f(\hat{x}) \hat{\omega}(\hat{x}) d\hat{x}$, où ω et $\hat{\omega}$ sont mesurables et essentiellement bornées sur G et \hat{G} . Toute distribution tempérée a un support et une distribution tempérée de support ponctuel est combinaison linéaire de dérivées de mesures de Dirac. La transformée de Fourier d'une distribution tempérée T sur G est définie par $\mathcal{F} \cdot T(\hat{j}) = T(\mathcal{F} \cdot \hat{j})$ (c'est une distribution tempérée sur \hat{G}); le spectre de T est par définition le support de $\mathcal{F} \cdot T$; si le spectre de T est ponctuel, T est produit d'un polynôme par un caractère; en particulier, toute fonction à croissance lente et mesurable définit une distribution tempérée à laquelle on peut appliquer ce résultat. Si G est connexe (resp. localement connexe) toute distribution tempérée (resp. et à support compact) appartient à \mathcal{D}' . Ceci permet d'étudier les distributions tempérées à support compact dans les groupes localement connexes. Un exposé détaillé et généralisé de ces résultats paraîtra prochainement.

Jean Braconnier (Lyon).

● Godement, R.: Sur la théorie des caractères. I: Définition et classification des caractères. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 967—969 (1949).

● Godement, R.: Sur la théorie des caractères. II: Mesures et groupes de classe finie. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1050—1051 (1949).

● Godement, R.: Sur la théorie des caractères. III: Un exemple de mesure — caractère de classe (I_∞). C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1107—1109 (1949).

L'A. étudie la généralisation des caractères des groupes abéliens localement compacts aux groupes unimodulaires. Soit G un groupe localement compact unimodulaire, L l'algèbre (avec le produit de composition $*$) des fonctions complexes continues sur G à support compact, munie de l'involution $f(x) \rightarrow \tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. On appelle trace sur G une mesure de Radon complexe μ de type positif, telle que $\mu(f * g) = \mu(g * f)$ ($f, g \in L$); si μ est une trace sur G , si n est l'idéal bilatère de L formé des f telles que $\mu(\tilde{f} * f) = 0$ et si $f \rightarrow \tilde{f}$ est l'application canonique de L sur L/n , $\langle f, g \rangle = \mu(\tilde{f} * \tilde{g})$ est un produit scalaire sur L/n ; en complétant et séparant L/n , on obtient un espace de Hilbert H ; les translations $y \rightarrow x^{-1}y$ (resp. $y \rightarrow yx$) définissent une représentation unitaire U_x (resp. V_x) de G dans H ; l'involution $f \rightarrow \tilde{f}$ définit une involution S de H telle que $V_x = S U_x S$ et $g \rightarrow f * g$ un opérateur U_f de H . Si R^s (resp. R^d) est l'anneau d'opérateurs engendré par les U_x (resp. V_x) ($x \in G$), les anneaux R^s et R^d sont commutants l'un de l'autre (on notera que $U_f \in R^s$). On dit qu'une trace μ est de classe finie si R^s est un anneau de classe finie [cf. F. J. Murray et J. v. Neumann, Ann. Math., Princeton, II. S. **37**, 116—229 (1936); cf. Zbl. **14**, 161 et J. Dixmier, C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 152—154 (1949)]; si toutes les traces sur G sont de classe finie, on dit que G est de classe finie; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les deux structures uniformes (droite et gauche) de G soient identiques. On dit qu'une trace est un caractère de G si $R^s \cap R^d$ est réduit aux scalaires; R^s et R^d sont alors des facteurs au sens de v. Neumann (op. cit.); si G est de classe finie, tous ses caractères sont de classe finie et G possède un système complet de caractères. Soit μ une trace de classe finie sur G ; à tout caractère χ de l'anneau R^s (i. e. homomorphisme du centre de R^s sur le corps des complexes) correspond une fonction χ_μ continue sur G ,

centrale et de type positif, telle que $\zeta(U_f) = \int f(x) \cdot \chi_\mu(x) dx$ si $f \in L$; les $\chi_\mu \neq 0$ forment un ensemble X localement compact dans l'espace $L^\infty(G)$ (muni de la topologie faible); si $\chi \in X$, $\chi(x) dx$ est une trace sur G et la construction précédente permet de définir une application canonique $f \rightarrow f(\chi)$ de L dans un espace de Hilbert $H(\chi)$ et des représentations unitaires $U_x(\chi)$ et $V_x(\chi)$ de G dans $H(\chi)$ et les fonctions $f(\chi)$ forment sur X une famille A de champs de vecteurs [cf. R. Godement, C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1321—1323 (1949)]; il existe alors une mesure de Radon positive $\hat{\mu}$ sur X telle que, pour toute $f \in L$, la fonction $\|f(\chi)\|$ soit de carré sommable sur X pour $\hat{\mu}$, que $\langle f, g \rangle = \int \langle f(\chi), g(\chi) \rangle d\hat{\mu}(\chi)$ (f et $g \in L$) et que H soit

isomorphe à l'espace des champs de vecteurs de carré sommable sur X construit à partir de $\hat{\mu}$ et de A . Si de plus G est séparable, presque tout χ est un caractère de G et ceci permet d'étudier les caractères dans les groupes séparables de classe finie. Si G est un groupe séparable, la théorie de v. Neumann (op. cit.) permet de classer les caractères de G : le cas (III_∞) ne peut pas se présenter; le cas (II_∞) se présente dans le cas où G est produit de deux groupes ayant respectivement des caractères des classes (I_∞) et (II_1); pour qu'une trace μ soit un caractère de classe (I_∞), il faut et il suffit qu'il existe une représentation unitaire irréductible $\{F, T_\mu\}$ de G de dimension infinie telle que les opérateurs T_f soient du type Hilbert-Schmidt et que $\mu(f * \tilde{g}) = \text{Tr}(T_f T_g^*)$ si f et $g \in L$. Ceci se présente dans le cas du groupe de Lorentz. L'A.

étudie le cas du groupe G des matrices réelles de la forme $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & 1 \end{pmatrix}$; en décomposant les représentations régulières U_x et V_x de G dans l'espace $L^2(G)$ en somme continue d'espaces isomorphes à $L^2(\mathbb{R}^2)$, à l'aide de la transformation de Fourier sur le centre Z de G , on obtient des caractères $\chi(z) dz$ de G [avec $\chi(z) \in \text{Hom}(Z, T)$ et dz mesure de Haar sur Z] de classe (I_∞) (si χ n'est pas constant) qui ne sont pas de la forme $\chi(s) ds$ [avec $\chi \in L^\infty(G)$] (comme c'est le cas pour le groupe de Lorentz). Un exposé plus détaillé et les démonstrations de ces résultats seront publiés prochainement au J. Math. pur. appl.

Jean Braconnier (Lyon).

Segal, I. E.: Invariant measures on locally compact spaces. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 105—130 (1949).

En utilisant des critères de sommabilité (relativement à une mesure complète définie sur une tribu de parties d'un ensemble E) pour des fonctions définies sur E et à valeurs dans un espace de Banach [cf. N. Dunford, Trans. Amer. math. Soc. 44, 305—356 (1938); ce Zbl. 19, 416] et le théorème de Weierstrass-Stone sur l'approximation des fonctions continues [cf. N. Dunford et I. E. Segal, Bull. Amer. math. Soc. 52, 911—914 (1946) et N. Bourbaki, Topologie générale, Ch. X, § 5, Paris 1949)], l'A. démontre le résultat suivant: soit E un espace localement compact où opère un groupe localement compact G , $L_1(G)$ l'espace des fonctions complexes sommables sur G pour une mesure de Haar ds et μ une mesure de Radon sur E , invariante par G ; si $f \in L_p(E, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) et $g \in L_1(G)$, $\int_G f(s^{-1} \cdot x) g(s) ds$ est presque partout égale à une fonction $h \in L_p(E, \mu)$ et on a $\|h\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$. En utilisant une généralisation de la démonstration de A. Weil sur l'existence d'une mesure de Haar [cf. K. Kodaira, Proc. phys. math. Soc. Japan, III. S. 23, 67—119 (1941); ce Zbl. 25, 237], l'A. démontre alors le théorème suivant: si G est un groupe uniformément équivariant d'homéomorphismes de E (pour une structure uniforme quelconque sur E) (cf. N. Bourbaki, op. cit. § 3), il existe une mesure de Radon sur E , invariante par G ; pour que cette mesure soit unique (à un facteur multiplicatif près), il faut et il suffit qu'il existe une classe d'intransitivité de G dense dans E .

Jean Braconnier (Lyon/France).

Segal, I. E.: Two-sided ideals in operator algebras. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 856—865 (1949).

Eine C^* -Algebra \mathfrak{A} ist ein Ring beschränkter Operatoren im Hilbertschen Raum, der (hinsichtlich der Norm) abgeschlossen und selbstadjungiert (d. h. mit A liegt stets A^* in \mathfrak{A}) ist. Ein C^* -Ideal ist ein abgeschlossenes selbstadjungiertes Ideal in \mathfrak{A} . Eine stetige Linearfunktion $\omega(A)$ auf \mathfrak{A} heißt ein Zustand, wenn $\omega(A) = \omega(A^*)$, $\omega(A^*A) \geq 0$ und $\sup \omega(A^*A) = 1$ für $\|A\| = 1$ gilt. Die Zustände bilden den Zustandsraum, in dem die schwache Topologie erklärt wird. Ein ω , das nicht Linearkombination zweier Zustände mit positiven Koeffizienten ist, heißt ein reiner Zustand. Ist T selbstadjungiert, \mathfrak{E} die durch T erzeugte C^* -Algebra, \mathfrak{H} die abgeschlossene Hülle des Bildraums von T , so wird durch $\omega(S) = (Sx, x)$, $x \in \mathfrak{H}$, für jedes $S \in \mathfrak{E}$ ein Zustand erklärt. Ist der Zustandsraum einer C^* -Algebra kompakt, so enthält \mathfrak{A} ein Einheitsselement I , $AI = IA = A$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal \mathfrak{I} einer C^* -Algebra \mathfrak{A} ist selbstadjungiert und wird durch seine nichtnegativen selbstadjungierten Elemente erzeugt. Zu jedem solchen \mathfrak{I} gibt es eine Menge von reinen Zuständen, so daß \mathfrak{I} gerade aus allen Elementen von \mathfrak{A} besteht, die auf allen diesen Zuständen verschwinden. Dieser Satz enthält als kommutativen Spezialfall das Ergebnis von Stone, daß jedes abgeschlossene Ideal im Ring der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf einem lokalkompakten Hausdorffschen Raum Γ aus den auf einer Teilmenge von Γ verschwindenden Funktionen besteht. Die Menge $\Delta(\mathfrak{I})$ aller Zustände, auf denen die Elemente von \mathfrak{I} verschwinden, ist konvex und kompakt. Der Restklassenring $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ ist wieder eine C^* -Algebra und $\Delta(\mathfrak{I})$ ist isomorph dem Zustandsraum von $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$. Ist $\mathfrak{I} \oplus \mathfrak{K}$ das durch \mathfrak{I} und \mathfrak{K} erzeugte C^* -Ideal, so ist $\Delta(\mathfrak{I} \oplus \mathfrak{K}) = \Delta(\mathfrak{I}) \cap \Delta(\mathfrak{K})$, ebenso wird

$\Delta(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}) = \Delta(\mathfrak{S}) \oplus \Delta(\mathfrak{R})$, wobei der letzte Ausdruck die konvexe abgeschlossene Hülle der Vereinigungsmenge von $\Delta(\mathfrak{S})$ und $\Delta(\mathfrak{R})$ bedeutet. *G. Köthe (Mainz).*

Loomis, Lynn H.: Haar measure in uniform structures. *Duke math. J.* **16**, 193—208 (1949).

Preliminaries. — S denotes a uniform structure with a fixed directed system X of indices. $A < B$ means that there exists an index x such that the x -neighbourhood $x[A]$ of A is included in B . For any two sets A_0 and A_1 verifying $A_0 < A_1$ there exists a family of sets A_α called interval of sets for which $0 \leq \alpha \leq 1$, and $A_\alpha < A_\beta$ if $\alpha < \beta$. The assumptions about S are as follows: (A_0) If $x < y$ there exists an index z such that $z \cdot x \leq y$; (A_1) X is dense; (A_2) the relation „ p and q are x -neighbours“ is symmetrical; (A_3) S is locally totally bounded; (A_4 , Homogeneity Axiom) the smallest number of x -neighbourhoods required to cover a y -neighbourhood is the same for all y -neighbourhoods. By „measure on S “ is meant a finite non-negative real-valued function $\mu(O)$ whose domain is a family \mathfrak{R} of open sets such that (R_1) if O_1 and $O_2 \in \mathfrak{R}$ then $O_1 \cup O_2 \in \mathfrak{R}$; and (R_2) if $O_1 \in \mathfrak{R}$ and O_2 is any open subset of O_1 then $O_2 \in \mathfrak{R}$; and which satisfies the following conditions: (M_1) $\mu(O_1) \leq \mu(O_2)$ if $O_1 \subseteq O_2$; (M_2) $\mu(O_1 \cup O_2) \leq \mu(x[O_1]) + \mu(x[O_2])$ for every index x ; (M_3) $\mu(O_1 \cup O_2) = \mu(O_1) + \mu(O_2)$ if O_1 and O_2 are index-separated. A counter example in the rational plane shows that (M_2) cannot in general be weakened to (M'_2) $\mu(O_1 \cup O_2) \leq \mu(O_1) + \mu(O_2)$. For a „measure μ “ the family \mathfrak{J} of the zero-boundary sets [Jordan measurable sets to compare with the „Stetigkeitsmenge“ of W. Fenchel and B. Jessen, *Danske Vid. Selsk. math. fys. Medd.* **16**, 3 (1938); this *Zbl.* **18**, 424] is a Boolean algebra and the restriction of μ to \mathfrak{J} is a Jordan measure. The measure μ is called continuous if (M_1), is replaced by the following stronger condition: (M_{1c}) $\mu(O) = \text{l. u. b. } \mu(O_1)$ for $O_1 < O$. A continuous measure is uniquely determined by its values on the family of the zero-boundary open sets. If S is locally compact and \mathfrak{R} the family of open sets with closures, then (M'_2) follows from (M_2) for a continuous measure, and μ can be uniquely extended to a completely additive measure on the Borel-family generated by \mathfrak{R} . The measure μ is called invariant if μ is defined for every neighbourhood $x(p)$ and (M_4) $\mu(x(p)) = \mu(x(q))$ [$= \mu(x)$]. — The main concern of the paper is the construction of invariant measures in S . This program is achieved in two steps, first the construction of the Jordan restriction and then the partial extension on the open totally bounded sets. The Haar covering functions $h(A, x)$ and $H(A, x)$ for a totally bounded set A are defined as in an earlier paper of the author [*Ann. Math., Princeton*, II. **S. 46**, 348—355 (1945)] which contains also essentially the fundamental lemmas upon which the paper rests. A convergence theorem is proved analogous to the theorem used by H. Cartan [*C. r. Acad. Sci., Paris* **211**, 759—762 (1940); this *Zbl.* **26**, 124] in his theory of Haar measure on locally compact groups. The Jordan measurable sets of the wanted invariant measure are introduced as „sets of continuity“ with respect to insertion in intervals of sets; they form a Boolean algebra \mathfrak{J} . If B_0 is a fixed set in \mathfrak{J} possessing interior points, A an arbitrary set in \mathfrak{J} , then $\lim h(A, x)/h(B_0, x)$ and $\lim H(A, x)/H(B_0, x)$ both exist and are equal, their common value $\mu(A)$ is a Jordan measure on \mathfrak{J} . The continuous extension $\mu_{\mathfrak{R}}$ of this Jordan measure on the family \mathfrak{R} of the totally bounded open sets of S is invariant with respect to all except a countable number of indices from any interval of indices. If m is any measure on \mathfrak{R} which is invariant with respect to all except a countable number of indices from any interval of indices, then m is a constant multiple of $\mu_{\mathfrak{R}}$ on \mathfrak{J} . Under the further axiom (A_5) If $B < x(p)$, there exists an index $y < x$ such that $B \subseteq y(p)$, $\mu_{\mathfrak{R}}$ is invariant with respect to every index; it is the unique (to within a multiplicative const.) continuous invariant measure on \mathfrak{R} . After a discussion of the combinatorial foundations of Haar measure follows a study of the transfer of a measure μ in S when S is completed to T according to A. Weil. To every open set O in S is namely assigned the largest open set in T denoted by O_T whose intersection with S is O and $\mu_T(O_T)$ is defined as $= \mu(O)$. Supposing μ to be a Haar measure in S the question is investigated as to the sense in which μ_T is a Haar measure in T . The results are applied to the problem of an invariant measure in a Hausdorff space T provided with a group G of homeomorphisms. The assumptions are as follows: (G_1) The images of any non-void open set cover T . (G_2) There is a non-void open set which can be covered by a finite number of images of any non-void open set. (G_3) Corresponding to $p \in O$ there exists a non-void open set of which every image containing p is a subset of O . Then there exists a unique measure on T which is invariant under all the transformations of G . About the function $H(A, x)$ it is proved that it is asymptotically equal to $\mu(A)/\mu(x)$ whenever A is a zero-boundary set. The definition of an invariant measure in S rested substantially on the covering axiom (A_4); as it is sketched the same theory may be developed if (A_4) is replaced by the corresponding packing axiom (P). The largest number of disjoint x -neighbourhoods contained in a y -neighbourhood is the same for all y -neighbourhoods. [Compare with the definition of the extension of a set in a metric space in A. Appert, *Bull. Sci. math.* **60**, 329—352, 368—380 (1936); this *Zbl.* **15**, 400.] *Chr. Pauc.*

Varsavsky, Oscar A.: Über die Hilbertsche Transformation. *Rev. Un. mat. Argentina* **14**, 20—37 (1949) [Spanisch].

Soit S l'opérateur défini sur l'ensemble des fonctions complexes de variable réelle par les relations: $S\varphi(x) = \varphi(x)$ si $x > 0$, $S\varphi(x) = -\varphi(x)$ si $x < 0$; S induit sur L^2 un opérateur unitaire continu. F étant l'opérateur de Fourier et H

l'opérateur de Hilbert défini par $H\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$ (où \oint signifie l'intégrale

à valeurs principales), on a $H = -iF^{-1}SF$. Cette relation permet à l'A. de retrouver les propriétés de H , indépendamment de la théorie des fonctions analytiques; d'autre part, de généraliser l'opérateur H à des groupes topologiques localement compacts dans lesquels une mesure de Haar est définie. *A. Pereira Gomes.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On Möbius' inversion. Amer. J. Math. **69**, 853—858 (1947).

Ein Vektor $z = (z(1), z(2), \dots)$ mit abzählbar vielen Komponenten heißt regulär, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |z(n)|$ konvergiert. Verff. betrachten das „Eratosthenische“ Gleichungssystem

$$Ex = y, \text{ d. h. } \sum_{m=1}^{\infty} x(nm) = y(n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und das „Möbiussche“ Gleichungssystem

$$My = x, \text{ d. h. } \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) y(nm) = x(n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und zeigen in Fortsetzung früherer Untersuchungen [A. Wintner, A solution theory of the Möbius inversion; Amer. J. Math. **68**, 321—339 (1946)]: Sind x und y regulär und gilt $My = x$, so ist $y = Ex$. Sind x und y regulär und gilt $y = Ex$, so ist $x = My$. Auf dem Wege über die zugehörigen homogenen Systeme folgt daraus leicht, daß $My = x$ für beliebiges x höchstens eine reguläre Lösung y haben kann sowie daß $Ex = y$ für beliebiges y höchstens eine reguläre Lösung x haben kann. *Stöhr (Hamburg).*

Tseng, Yuan-Yung: Sur les solutions des équations opératrices fonctionnelles entre les espaces unitaires. Solutions extrémales. Solutions virtuelles. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 640—641 (1949).

Soient H un espace hilbertien de dimension quelconque, réel, complexe ou quaternionique, A et B des opérateurs linéaires fermés de H . $f \in H$ est appelée solution virtuelle de l'équation $Af = g$ si Af est la projection de g sur la variété linéaire fermée engendrée par AH . L'A. énonce sans démonstration des conditions nécessaires et suffisantes (1) pour que l'équation $Af = g$ ait une solution; (2) pour que les équations $Af = g$ et $Bf = g'$ aient une solution commune; (3) pour que l'équation $Af = g$ ait une solution virtuelle. N_A étant l'ensemble des solutions de $Af = 0$, la solution de (1) et (3) est unique dans $H \ominus N_A$ et celle de (2) est unique dans $H \ominus (N_A \cap N_B)$. Conditions de convergence faible et forte de la suite des solutions virtuelles f_n d'une suite d'équations $Af = g_n$. *A. Pereira Gomes.*

Dixmier, Jacques: Sur les opérateurs self-adjoints d'un espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 267—269 (1950).

L'A. démontre les propriétés suivantes de l'ensemble ordonné S des opérateurs self-adjoints d'un espace de Hilbert H : 1) Pour tout opérateur positif $A \in S$ et toute variété linéaire fermée $M \subset H$, l'ensemble des $B \in S$, $0 \leq B \leq A$, réduits par M et induisant 0 dans $H \ominus M$, possède un plus grand élément. 2) Tout sous-ensemble F de S , filtrant-croissant et majoré possède une borne supérieure qui est fortement adhérente à F . *A. Pereira Gomes (Nancy).*

Bohr, Harald and Erling Følner: On a structure theorem for closed modules in an infinite-dimensional space. Studies Essays, pres. to R. Courant, 45—62 (1948).

R^{∞} denotes the space of the sequences (x_1, \dots, x_n, \dots) where the convergence

notion is defined by convergence in each of the components. The paper contains an extension to R^∞ of the Structure Theorem for closed modules in an m -dimensional space R_m . The infinite-dimensional case is reduced to the finite-dimensional one using the intermediate space R_∞ consisting of the sequences (x_1, \dots, x_n, \dots) having only a finite number of non-vanishing components with the same definition of convergence. The proof rests on the duality properties of R^∞ and R_∞ ; for instance if M is a closed module in R^∞ then $M'' = M$. *Chr. Pauc* (Cape Town).

Grothendieck, Alexandre: Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 605—606 (1950).

Soient E un espace vectoriel localement convexe, S un ensemble de parties bornées, convexes, symétriques et fermées de E , E'_S (resp. \hat{E}'_S) l'espace des formes linéaires sur E continues (resp. dont les restrictions aux éléments de S sont continues), munis de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de S . \hat{E}'_S est complet. Lemme: Si les éléments de S sont précompacts, E'_S est dense dans \hat{E}'_S . Nombreux corollaires, concernant des problèmes de complétion; exemples: 1. Si le sous-espace engendré par les éléments de S est E , et si les éléments de S sont précompacts, le complété de E'_S s'identifie à \hat{E}'_S . 2. Le complété de E s'identifie à l'espace des formes linéaires sur son dual dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur ces parties. *Dixmier* (Paris).

Hirschman jr., I. I.: Approximation by non-dense sets of functions. *Ann. Math., Princeton, II. S.* **50**, 666—675 (1949).

Bekanntlich ist der von den Funktionen $e^{-a_k x}$ aufgespannte abgeschlossene lineare Raum dann und nur dann mit dem Raum L^2 identisch, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k^2}$ divergiert. Im gegenteiligen Fall geht Verf. von folgendem Satz von L. Schwartz (Étude des sommes d'exponentielles réelles. Paris, Édition Hermann, 1943) aus: A bezeichne den abgeschlossenen linearen Raum, der durch die Funktionen $e^{-a_k x}$ aufgespannt wird, wo die a_k positive Konstante mit den Eigenschaften $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ sind. Dann entsteht jede Funktion $f(x)$ von A aus einer für $\Re z > 0$ analytischen Funktion $f(z)$ durch Beschränkung auf die positiv reelle Achse. — Durch die Hankel-Transformation

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{xu}) e^{-bx} dx = \frac{1}{b} e^{-u/b}$$

kann man von der Exponentiellen e^{-bx} zu $e^{-x/b}$ übergehen. Dadurch entsteht der Satz: B bezeichne den abgeschlossenen linearen Raum, der durch die Funktionen $e^{-b_k x}$ aufgespannt wird, wo die b_k positive Konstante mit den Eigenschaften $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ sind. Dann entsteht jede Funktion $f(x)$ von B aus einer in der ganzen z -Ebene analytischen Funktion $f(z)$ durch Beschränkung auf die positiv reelle Achse. — Damit gelingt es, in dem Schwartzschen Satz die Voraussetzung $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ zu streichen und folgenden Satz auszusprechen: C bezeichne den abgeschlossenen linearen Raum, der durch die Funktionen $e^{-c_k x}$ aufgespannt wird, wo die c_k positive Konstante mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{1+c_k^2} < \infty$ sind. Dann entsteht jede Funktion von C aus einer für $\Re z > 0$ analytischen Funktion $f(z)$ durch Beschränkung auf die positiv reelle Achse. Der Beweis wird so geführt, daß die c_k in die zwei Mengen $c_k \geq 1$ und $c_k < 1$ zerlegt werden. Die von den ent-

sprechenden Exponentiellen aufgespannten Räume sind „vollständig disjungiert“, infolgedessen läßt sich jedes $f(x)$ aus C eindeutig in die Summe zweier Funktionen aus A und B zerlegen, so daß der Satz durch Anwendung der beiden obigen Sätze folgt. — In ähnlicher Weise wird durch Einführung des Begriffs der „approximativ unitären“ Transformation folgender Satz durch Zerlegung jeder Funktion in drei Komponenten bewiesen: D bezeichne den abgeschlossenen linearen Raum, der durch die Funktionen $1/(x + d_k)$ aufgespannt wird, wo die d_k positive Konstante mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{d_k}}{1 + d_k} < \infty$ sind. Dann entsteht jede Funktion $f(x)$ von D aus einer Funktion $f(z)$, die in der entlang der negativ reellen Achse aufgeschlitzten Ebene analytisch ist, durch Beschränkung auf die positiv reelle Achse. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Ruston, A. F.: A short proof of a theorem on reflexive spaces. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 45, 674 (1949).

Einfacher Beweis des Satzes, daß ein Banachscher Raum dann und nur dann reflexiv ist, wenn sein konjugierter Raum reflexiv ist. *G. Köthe* (Mainz).

Praktische Analysis:

● **Besikovič, Ja. S.:** Näherungsrechnung. 6. verm. Aufl. Leningrad, Moskau: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1949. 463 S., 7,50 Rubel [Russisch].

Kapitelüberschriften. I. Grundbegriffe der Fehlertheorie. II. Die Fehler bei den einfachsten arithmetischen Operationen. III. Ausführung der einfachsten arithmetischen Operationen. IV. Der Rechenschieber. V. Interpolation. VI. Operationen mit Reihen. VII. Näherungslösungen von Gleichungen. VIII. Die Methode der kleinsten Quadrate. IX. Mechanische und graphische Auswertung von Integralen. X. Harmonische Analyse und Annäherung durch Exponentialpolynome. XI. Numerische Integration von Differentialgleichungen. — Das Buch bringt eine Einführung in die praktische Analysis und legt besonderen Wert darauf, die Grundbegriffe zu entwickeln und durch zahlreiche Zahlenbeispiele und Figuren zu erläutern. Dementsprechend nehmen die vorbereitenden Kapitel I—VI nahezu die Hälfte des Buches ein, und auch im zweiten Teil wird vor allem gerechnet und weniger Theorie getrieben. — Im einzelnen bringt Kap. V die klassischen Interpolationsformeln ohne Restuntersuchung, Kap. VI die Grundbegriffe und einfachsten Rechenregeln für Reihen mit konstanten und veränderlichen Gliedern, im wesentlichen unter Beschränkung auf das Reelle. Kap. VII enthält verschiedene numerische und graphische Verfahren zur Auflösung algebraischer und transzendenter Gleichungen, Kap. IX neben den bekannteren Quadraturformeln von Newton, Simpson u. a. auch einige weniger bekannte, ferner einiges zur Berechnung von mehrfachen Integralen und Kurvenintegralen. Im Kap. X findet man nach einer kurzen Einleitung über Fouriersche Reihen Verfahren zur numerischen Berechnung der ersten Fourier-Koeffizienten und zur Darstellung von Funktionen in der Gestalt $\varphi(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + a_n e^{\alpha_n x}$; Kap. XI bringt schließlich in kurzer Darstellung einige rechnerische Integrationsverfahren (Euler, Runge). — Einige Geräte der praktischen Analysis (Rechenmaschine, Integrator usw.) werden in den entsprechenden Kapiteln kurz behandelt. *W. Hahn* (Berlin).

● **Willers, F. A.:** Methoden der praktischen Analysis. Zweite, verb. u. erw. Aufl. (Göschens Lehrbücherei. I. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik Bd.12) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1950. 3, 410 S. u. 93 Fig., DM 24.—.

Von dem reichen Inhalt des nun in zweiter Auflage erschienenen Buches gibt das ausführliche Sachverzeichnis eine Vorstellung und auch schon die Kapitelüberschriften: I. Das Zahlenrechnen und seine Hilfsmittel. II. Interpolation im engeren Sinne. III. Angenäherte Integration und Differentiation. IV. Interpolation im weiteren Sinne; trigonometrische Interpolation. V. Praktische Gleichungslehre. VI. Genäherte Integration von Differentialgleichungen. — Bei der Neubearbeitung der einzelnen, für sich lesbaren, Abschnitte ist natürlich die neuere Literatur nach Möglichkeit berücksichtigt worden, und zwar hat sich Verf. bemüht, nur solche Methoden aufzunehmen, die in der Praxis wirklich gebraucht werden. Insbesondere wird nun auch auf Variations- und Eigenwertprobleme eingegangen. Um Platz zu sparen, ist in dieser Auflage manches fortgelassen. Die Seitenzahl ist um 56 gewachsen. — Da unter den Benutzern des Werkes durchaus verschiedene Interessen und Bedürfnisse vertreten sind, ist es verständlich, wenn dieser oder jener Leser etwas vermißt, bzw. eine ausführlichere Darstellung wünscht. An manchen, und zwar auch an schwierigeren Stellen ist immerhin die Behandlung sowohl an sich erschöpfend als durch ins einzelne durchgeführte Beispiele erläutert. Diese letzteren erhöhen den Wert der Arbeit sowohl als Lehrbuch wie als gelegentlich zu benutzendes Nach-

schlagewerk. Die Ausstattung ist vorzüglich. Bei den Namen der zitierten Autoren, die wohl diktiert wurden, kommen mehrere Schreibfehler vor. *Nyström* (Helsinki).

Todd, John: The condition of a certain matrix. Proc. Cambridge philos. Soc. 46, 116—118 (1950).

Für die Erscheinung, daß die n -reihige, quadratische Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ eines linearen Gleichungssystems ill-conditioned, d. h. für die numerische Auflösung ungünstig ist und die Gleichungen schlecht miteinander verträglich sind, sind drei überschlägige Maßzahlen eingeführt worden: Die N -Zahl $N(A) N(A^{-1})/n$ mit $N(A) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$, die M -Zahl $nM(A)M(A^{-1})$ mit $M(A) = \text{Max } |a_{ij}|$ und die P -Zahl λ/μ , wo λ bzw. μ größter bzw. kleinster Betrag der charakteristischen Wurzeln von A sind. Die drei Maßzahlen werden für die aus den Differenzengleichungen für Randwertaufgaben bei $y'' = p(x)$ (und mit leichter Modifikation bei $y'' = ky$) auftretende Matrix C_n mit den Elementen $a_{ii} = -2$, $a_{ij} = 1$ für $|i-j| = 1$, $a_{ij} = 0$ für $|i-j| > 1$ ausgerechnet. Die Maßzahlen wachsen mit $n^{3/2}$ oder n^2 , fallen mithin ungünstiger aus als für eine „willkürliche Matrix“. *Collatz*.

Todd, John: The condition of certain matrices. I. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 469—472 (1949).

In der vorangehenden Arbeit verwendete Maßzahlen werden für die n^2 -reihige Koeffizientenmatrix A berechnet, die zu den Differenzengleichungen bei $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = kz$, $z = 0$ am Rande eines Quadrates gehören. Die N -Zahl hat für $n \rightarrow \infty$ die Größenordnung $O(1)$, das Gleichungssystem ist mithin günstiger als ein „willkürliches“ Gleichungssystem und günstiger als im entsprechenden Fall der gewöhnlichen Differentialgleichung $y'' = ky$, eine Erscheinung, die von Rechnern schon beobachtet wurde. Mit steigender Dimensionenzahl verbessert sich die N -Zahl weiterhin. *Collatz* (Hannover).

Ljusternik, L. A.: Über elektrische Modelle von symmetrischen Matrizen. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 2 (30), 198—200 (1949) [Russisch].

Bei dem Versuch, lineare Gleichungssysteme durch elektrische Modelle (Netzwerke) darzustellen und zu lösen, ergeben sich Symmetriebedingungen für die Matrizen. Verf. deutet an, wie man sich von diesen befreien kann, indem man die Knotenzahl verdoppelt. *Egon Ullrich* (Gießen).

Jenne, W.: Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. Astron. Nachr. 278, 73—95 (1949).

Verf. gibt zunächst eine kurze Darstellung eines bisher nicht veröffentlichten Verfahrens von K. Friedrich zur Auflösung linearer Gleichungssysteme, die wie die Winkelnormalgleichungen in der geodätischen Netzausgleichung eine systematisch gebaute Koeffizientenmatrix mit zahlreichen verschwindenden Elementen aufweisen. Dieses sog. Determinantenverfahren geht von der bekannten Punktdarstellung der Normalgleichungen aus, bei der jedem Element der Hauptdiagonale der Koeffizientenmatrix ein Punkt der Zeichenebene zugeordnet wird und jedem nicht verschwindenden Element $a_{\mu\nu}$ die Verbindungslinie der Punkte μ und ν . Es werden Sätze angegeben, mit deren Hilfe man aus der Punktdarstellung der Normalgleichungen die Elemente der inversen Matrix in einfacher Weise berechnen kann, ohne daß die aufzulösenden Gleichungen angeschrieben werden müssen. Das Verfahren wird an einer Reihe von Beispielen aus der geodätischen Ausgleichungspraxis erläutert. Eine ausführlichere Darstellung mit den nötigen Beweisen soll in einer späteren Veröffentlichung erfolgen. — Ferner wird eine Vervollkommenung der Kettenbruchlösung gegeben, die sich auf die Berechnung der Kettenbrüche mittels ihrer Näherungszähler und Näherungsnenner gründet. Man erhält aus den Näherungsnennern von 2 bestimmten Kettenbrüchen in einem eleganten Rechenschema gleichzeitig sämtliche Elemente der inversen Matrix des vorgelegten Gleichungssystems. — Die große Anpassungsfähigkeit des Determinanten-

verfahrens von Friedrich zeigt Verf. durch Anwendung dieser Methode auf ein von N. E. Nörlund behandeltes allgemeines Problem der Ausgleichsrechnung und Fehlertheorie, bei dem ebenfalls nur Differenzen zyklisch angeordneter Beobachtungen in die Ausgleichung eingehen. In der von Nörlund unter Anwendung der Theorie der Differenzengleichungen gegebenen Lösung werden zur Berechnung der Gewichtsgrößen Q_{jj} der Unbekannten die mit ganzzahligen Koeffizienten ausgestatteten Polynome

$$\varphi_{n,r}(x) = \prod_{v=1}^{n-1} \left(x - \frac{\sin(rv\pi/n)}{\sin(v\pi/n)} \right)$$

benutzt, die sich auch in Determinantenform schreiben lassen. Verf. gibt für diese Polynome, deren Eigenschaften von ihm eingehend untersucht werden, Punktdarstellungen an, aus denen diese mit Hilfe der Sätze von Friedrich berechnet werden können, und findet in Verbindung mit den von ihm für Normalgleichungen mit symmetrischer Punktdarstellung abgeleiteten Formeln eine weitgehende Analogie zur Ausgleichung von Winkelbedingungen in Dreiecksnetzen. *W. Hofmann.*

Bodewig, E.: On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation. *Quart. appl. Math.* **7**, 325—333 (1949).

Verf. untersucht den Konvergenzgrad g verschiedener Iterationsprozesse zur Berechnung der Wurzeln von Gleichungen, insbesondere für den Fall mehrfacher Wurzeln. Eine konvergente Folge $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rightarrow X$ hat den Konvergenzgrad g , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - X}{(x_n - X)^g} = c \neq 0$$

ist. Es ergibt sich z. B., daß sowohl das Newtonsche wie das Laguerresche Verfahren im Fall mehrfacher Wurzeln linear konvergieren, während die Konvergenz für einfache Wurzeln bei ersterem quadratisch, bei letzterem kubisch ist; Verf. gibt Formeln, deren Konvergenz stets quadratisch bzw. kubisch ist. Weiter wird eine Formel abgeleitet, die bei einfachen Wurzeln eine Konvergenz n -ten Grades ergibt. Sie stimmt überein mit der beim erweiterten Newtonschen Verfahren angewandten. Bei mehrfachen Wurzeln konvergiert auch sie nur linear. *Willers (Dresden).*

Malavard, Lucien et Jean Tissot: Sur une méthode utilisant le bassin électrique pour la détermination des racines d'une équation algébrique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 620—622 (1948).

Kurzer Bericht über die bei der O. N. E. R. A. (Office nationale des études et recherches aéronautiques) mit einem elektrischen Trog von $1,5 \times 2,0$ m Größe gemachten Erfahrungen bei der Lösung algebraischer Gleichungen 4., 5. und 9. Grades. Verbesserungen der Genauigkeit können dadurch erzielt werden, daß man nicht den Realteil, sondern den Imaginärteil der Funktion dem elektrischen Analogon zugrunde legt. Weiterhin kann man, um sicher alle Wurzeln zu erhalten, durch konforme Abbildung die sonst durch die Größe des elektrischen Troges begrenzte Halbebene in das Innere des Einheitskreises abbilden, wodurch die Begrenzung des Troges keine Einschränkung des Bereiches mehr bildet. *Koehler.*

Berthod-Zaborowski, Henri et Henri Mineur: Sur le calcul numérique des intégrales doubles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **229**, 919—921 (1949).

Doppelintegrale lassen sich durch Anwendung bekannter Quadraturformeln numerisch auswerten, wenn die Randkurve des Integrationsgebietes von den Geraden einer bestimmten Parallelschar in nur zwei Punkten geschnitten wird. Für den Fall, daß eine oder beide der Parallelen die Randkurve berühren, werden geeignete Variablentransformationen angegeben. *Nyström (Helsinki).*

Kuntzmann, Jean: Meilleure formule de quadrature approchée à deux valeurs pour les fonctions ayant une dérivée seconde bornée. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 584—586 (1948).

Eine Quadraturformel wird gegeben nebst zugehöriger Fehlerabschätzung, in welcher nur die 2. Ableitung auftritt. *Nyström* (Helsinki).

Pflanz, E.: Allgemeine Differenzenausdrücke für die Ableitungen einer Funktion $y(x)$. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 379—381 (1949).

Es wird für die m -te Ableitung $y^{(m)}(x_0)$ einer mindestens $(n+1)$ -mal stetig differenzierbaren Funktion $y(x)$ an einer Stelle x_0 zu beliebig verteilten, voneinander verschiedenen Abszissen $x_\varrho = x_0 + \alpha_\varrho h$ ($\varrho = 1, 2, \dots, n$) ein Differenzenausdruck („finiter Ausdruck“, d. h. eine Linearkombination aus den Werten $y(x_\varrho)$ mit Fehlerglied in geschlossener Form durch endliche Summen angegeben. Dabei sei $1 \leq m \leq n$. In dieser Summe tritt als Hilfsgröße S_λ die Summe der Kombinationen sämtlicher Elemente $1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n$ zur λ -ten Klasse ohne Wiederholung auf. Im Falle äquidistanter Abszissen vereinfacht sich die Formel. Die dann an Stelle von S_λ tretenden Σ_λ werden bis $\lambda = 7$ in einer Tabelle zahlenmäßig angegeben. Liegen die äquidistanten Abszissen überdies symmetrisch zu x_0 , so kommt man auf schon früher vom Verf. aufgestellte Ausdrücke zurück. *Collatz* (Hannover).

Poel, W. L. van der: Annäherung von experimentell gegebenen Funktionen durch Mittel von Polynomen mit der Methode von Tschebyscheff. *Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr.* **26**, 189—199 (1948/49) [Holländisch].

Verf. geht von einer tabellarisch gegebenen Funktion aus und versucht, diese Funktion durch ein Polynom möglichst niedrigen Grades möglichst gut anzunähern, derart, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen minimal ist. Weiter betrachtet er die Differenzen zwischen den Annäherungen aufeinanderfolgender Polynomgrade und eine Formel für die Genauigkeit einer bestimmten Annäherung. Er wendet das Verfahren auf ein numerisches Beispiel an. *M. Strutt* (Zürich).

Hamel, Georg: Zur Fehlerschätzung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 337—341 (1949).

Ist $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi^n$ Lösung der Differentialgleichung $d\eta/d\xi = a/(1-\xi)(1-\eta)$,

so kann man, wie Verf. zeigt, $C_n = \sum_{\lambda=1}^n \frac{K_{n,\lambda}}{n!} a^\lambda$ setzen und die Rekursionsformel

benützen: $K_{n,\lambda} = (n-1)K_{n-1,\lambda} + (2\lambda-3)K_{n-1,\lambda-1}$ ($n \geq 2$), $K_{n,1} = (n-1)!$, $K_{n,\lambda} = 0$ für $n > \lambda$. Damit können die Koeffizienten C_n rasch berechnet und auch abgeschätzt werden: $C_n < \frac{3^{n-2}}{n(n-1)} a \frac{1-a^n}{1-a}$ ($a \neq 1$). Die Rekursionsformel folgt

leicht aus der Bemerkung, daß η der partiellen Differentialgleichung $(1-\xi)\partial\eta/\partial\xi - 2a^2\partial\eta/\partial a + a\eta = a$ genügt. Da η bei geeigneter Bestimmung von a eine Majorante für die allgemeine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ darstellt, ist damit auch eine Fehlerabschätzung für $y(x)$ geliefert. Verf. gibt noch einige Verallgemeinerungen und Anwendungen an. *Gröbner*.

Conforto, Fabio: Neue Fortschritte in der numerischen Lösung der partiellen Differentialgleichungen der höheren Technik. *Arch. Math.*, Karlsruhe **2**, 135—138 (1950).

L'A., considerando il sistema delle equazioni dell'equilibrio di un solido elastico, espone un metodo per l'integrazione dei sistemi alle derivate parziali dovuto al Picone (questo Zbl. **29**, 296) e sviluppato da Amerio (questo Zbl. **34**, 202) e dal recensore (questo Zbl. **31**, 131).

Gaetano Fichera (Roma).

Lehmann, N. J.: Berechnung von Eigenwertschranken bei linearen Problemen. *Arch. Math.*, Karlsruhe **2**, 139—147 (1950).

Ohne Beweise wird über folgende Ergebnisse berichtet: In der Integralgleichung $y(x) = \lambda \int \kappa(x, s) y(s) ds$ sei der Kern $\kappa(x, s)$ reell symmetrisch, quadratisch integrierbar und von mittlerer Stetigkeit. Die Eigenwerte seien nach

$$\dots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} \leq \lambda_0 < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

geordnet. Zur Eingrenzung der Eigenwerte wird der Templesche Quotient:

$$T_1(y, t) = \frac{\int [y(x) - t \int \kappa(x, s) y(s) ds] y(x) dx}{\iint \kappa(x, s) [y(x) - t \int \kappa(x, s) y(s) ds] y(s) dx ds}$$

herangezogen. Die Eigenwerte lassen sich dann durch folgende Extremaleigenschaften kennzeichnen: Es sei $\lambda_i < t_i < \lambda_{i+1}$. Werden in $T_1(y, t_i)$ alle Funktionen in Betracht gezogen, für die $T_1(y, t_i) > t_i$ (bzw. $< t_i$) bleibt, so ist das Minimum (bzw. Maximum) der Eigenwert λ_{i+1} (bzw. λ_i). Ferner: Es seien $v_1, v_2, \dots, j-1 \geq 0$ beliebig gewählte Funktionen und $M[v_r]$ das Minimum von T_1 , wenn alle y zugelassen werden, die zu allen v_r orthogonal sind und für die $T_1 > t_i$ ausfällt. Zieht man jetzt alle möglichen Funktionensysteme v_r in Betracht, so ist das Maximum aller Minima $M[v_r]$ gerade der Eigenwert λ_{i+j} . Der Templesche Quotient hängt auch mit den Schwarzschen Konstanten a_v des Iterationsverfahrens zusammen.

Von $y = y^{(0)}(x)$ oder einem System $\varphi_v = \varphi_v^{(0)}(x)$ ausgehend werden

$$y^{(n)} = \int \kappa(x, s) y^{(n-1)}(s) ds \quad \text{bzw.} \quad \varphi_v^{(n)} = \int \kappa(x, s) \varphi_v^{(n-1)}(s) ds \quad \text{und} \\ a_n = \int y^{(n-m)} y^{(m)} dx \quad \text{bzw.} \quad a_n^{ve} = \int \varphi_v^{(n-m)} \varphi_v^{(m)} dx = a_n^{ev} \quad \text{gebildet.}$$

Dann ist $T_1(y, t) = \frac{a_0(y) - t a_1(y)}{a_1(y) - t a_2(y)}$, und es gilt folgende Erweiterung des Ritzschen Verfahrens: Bei k gewählten linear unabhängigen Funktionen $\varphi_v(x)$ seien die Wurzeln $A(k, t_i)$ der Determinante $|a_0^{ve} - t_i a_1^{ve} - A(a_1^{ve} - t_i a_2^{ve})| = 0$ nach

$$\dots \leq A_{i-1}(k, t_i) \leq A_i(k, t_i) \leq A_{i+1}(k, t_i) \leq \dots$$

geordnet und beziffert. Dann ist $A_{i+j}(k, t_i) \geq A_{i+j}(k+1, t_i) \geq \lambda_{i+j}$ für $j \geq 1$, $A_{i+j}(k, t_i) \leq A_{i+j}(k+1, t_i) \leq \lambda_{i+j}$ für $j \leq 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{i+j}(k, t_i) = \lambda_{i+j}$.

Die Sätze gelten auch für selbstadjungierte definite Eigenwertaufgaben mit der Differentialgleichung $L[y] + \lambda N[y] = 0$. Es folgen Bemerkungen über praktische Anwendungen der Sätze und ein Zahlenbeispiel. *Collatz* (Hannover).

Lehmann, N. Joachim: Beiträge zur numerischen Lösung linearer Eigenwertprobleme. I, II. Z. angew. Math. Mech. **29**, 341—356 (1949); **30**, 1—16 (1950).

Ausführlicher mit Beweisen versehene Darstellung von Ergebnissen, über die Verf. in der vorstehend besprochenen Arbeit berichtet. Die Beweise werden mit Hilfe der Integralgleichungstheorie, Resolvente usw. geführt. *Collatz* (Hannover).

Boulanger, Georges R.: Vues nouvelles sur la nomographie. Rev. génér. Sci. pur. appl., Bull. Soc. philomathique, Paris **56**, 197—212 (1949).

Teilweise die Darstellungen früherer Arbeiten (s. dies. Zbl. **29**, 145) wiederholend, gibt Verf. einen Überblick über die Möglichkeiten zum Aufbau sehr allgemeiner Nomogramme aus übereinander liegenden (transparenten), beweglichen Kurvenblättern (enthaltend kodierte Kurvenscharen, Funktionsleitern, Punkte). Nach Einführung einer Terminologie wird die Minimal- und Maximalzahl der Variablen bestimmt, die in einem Nomogramm aus n Kurvenblättern dargestellt werden können. Zur Untersuchung der geometrischen Struktur wird eine schematische Darstellung gewählt, bei der die einzelnen Berührungen durch Symbole gekennzeichnet werden. Verf. verschafft sich dadurch einen Überblick über die sich bietenden geometrischen Möglichkeiten. Es werden aber keine Aussagen über die Art der darstellbaren Funktionen gemacht.

Rudolf Ludwig (Braunschweig).

Ascoli, Guido: Vedute sintetiche sugli strumenti integratori. Rend. Sem. mat. fis. Milano **18**, 36—54 (1948).

Verf. entwirft eine allgemeine Theorie der Planimeter und Integraphen. Zunächst werden die Planimeter als Geräte charakterisiert, welche eine Abbildung \mathfrak{A} eines veränderlichen Punktes P (des Ortes des Fahrstiftes) auf einen Punkt Q (Berührungspunkt zwischen Zeichenfläche und Meßrad) definieren, wobei durch die

Lage von P auch die Lage der Achse des Meßrades festgelegt ist. Wird P längs einer Kurve geführt, dann beschreibt Q die in \mathfrak{M} entsprechende Kurve. Das Meßrad wird dabei in der Regel gleichzeitig rollen und gleiten. Seine Abrollung ist ein Kurvenintegral, das durch die Gauß-Greensche Formel einem Gebietsintegral gleich ist. Der in Rede stehende Apparat eignet sich dann zur Messung dieses Gebietsintegrals. Hier ordnen sich außer den zur Flächenbestimmung bestimmten Geräten, auch Momentenplanimeter, die Gonellasse Scheibe u. dgl. ein. — Von den Planimetern unterscheiden sich die Integrappen dadurch, daß sie zwischen dem Ort P des Fahrstiftes — es handelt sich in der Arbeit immer nur um Apparate mit nur einem Fahrstift — und dem Berührungspunkt Q des Integrierrades keine feste Beziehung definieren, sondern den Punkten P und Q ein umfangreicheres Kontinuum von gegenseitigen Lagen gestatten. Die Achsenrichtung des Integrierrades ist erst durch P und Q bestimmt. Ihm wird nicht gestattet zu gleiten, sondern es hat die Aufgabe, den Punkt Q normal zur Radachse zu führen (Führungsrad). Die von Q beschriebene Kurve löst je nach dem Bau des Gerätes eine Differentialgleichung. Auch hier spielt die Gauß-Greensche Umformung eine wichtige Rolle. *Vietoris.*

Hartree, D. R.: The tabulation of Bessel functions for large argument. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 45, 554—557 (1949).

Bei der Berechnung von Funktionentafeln kann man durch die Einführung von Hilfsvariablen und Hilfsfunktionen den Bereich der Hilfstafeln sehr einschränken, wodurch an die erforderlichen Speichereinrichtungen bei den Rechenmaschinen keine allzu hohen Anforderungen gestellt werden müssen. Als Beispiel wird die Berechnung von Besselfunktionen der Ordnung 0 mit zwei verschiedenen Hilfsfunktionen betrachtet.

G. Koehler (Darmstadt).

• **The Staff of the Computation Laboratory:** Tables of the Bessel functions of the first kind of orders fifty-two through sixty-three. — Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1949. 544 p.; \$ 8,00.

• **Rybnér, Jørgen and K. Steenberg Sørensen:** Table for use in the addition of complex numbers. København: Jul. Gjellerups Forlag, 1948. XIV, 95 p.; \$ 5,50.

• **Staff of the Computing Section, Center of Analysis, under the direction of Zdeněk Kopal:** Tables of supersonic flow around cones of large yaw. — (Massachusetts Institute of Technology: Department of Electrical Engineering, Center of Analysis, Technical Report No. 5.) Cambridge, Mass.: Massachusetts Institute of Technology 1949. XVIII, 125 p.

• **U. S. National Applied Mathematics Laboratories:** Tables of scattering functions for spherical particles. Washington: U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1949. XIII, 119 p.; 45 cents.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Rossier, Paul: La géométrie et la théorie de la connaissance. *Arch. Sci., Genève* 1, 460—486 (1948).

Als geometrische Beispiele werden außer der v. Kochschen Kurve, der Peanokurve, den hornförmigen Winkeln, Poincarés Modell der hyperbolischen Geometrie, Hilberts nicht-desarguesscher Geometrie, dem Möbiusband, auch eine Kurve von de Rham [*Rev. math. élém.* 2, 73—89 (1947)] und eine abwickelbare Fläche, die keine Geraden (aber Singularitäten) enthält, diskutiert.

Bachmann (Kiel).

Verriest, G.: Die Halbierung des Dreiecks in der nicht-euklidischen Geometrie. *Simon Stevin, wis.-natuurk. Tijdschr.* 25, 162—164 (1947) [Holländisch].

Es wird elementar, unabhängig von der Stetigkeit, gezeigt, daß sich in der nicht-euklidischen Geometrie jedes Dreieck durch eine Ecktransversale in zwei flächen-

gleiche Teildreiecke zerlegen läßt. Hierzu wird das zu dem gegebenen Dreieck ABC flächengleiche Saccherische Viereck, das man erhält, wenn man von A und B die Lote auf die Verbindungsgerade der Mittelpunkte von CA und CB fällt, flächengleich verwandelt in ein Viereck, das von einer Diagonalen in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird.

Bachmann (Kiel).

Fenchel, W. and J. Nielsen: On discontinuous groups of isometric transformations of the non-euclidean plane. *Studies Essays*, pres. to R. Courant, 117—128 (1948).

D represents the hyperbolic plane. A group of transformations of D onto itself is called discontinuous if the set of the images of any point in D has no accumulation point (in D). In this note is proved the following „discontinuity theorem“: A necessary and sufficient condition for a group G of isometries of the hyperbolic plane which leaves invariant no point and no line being discontinuous is that the centers of the rotations in G , if any, do not accumulate in D . The special case when G consists of translations only has been previously proved by J. Nielsen [*Mitt. math. Ges. Hamburg* 8, 82—104 (1940); this *Zbl.* 23, 213]. In the present proof are used the classification of the hyperbolic isometries, their product properties and some formulae of hyperbolic trigonometry. The figures are drawn in the Poincaré manner. *Pauc.*

Vincent, Georges: Les groupes linéaires finis sans points fixes. *Comment. math. Helvetici* 20, 117—171 (1947).

La recherche des „formes spatiales sphériques“ (variétés compactes qui peuvent être munies d’une métrique riemannienne donnant lieu à une courbure positive constante) conduit à déterminer les groupes finis de rotations sans point fixe de S^n , donc les groupes finis admettant des représentations linéaires sans point fixe. Un groupe abélien de cette nature est nécessairement cyclique, donc les groupes cherchés satisfont à la propriété suivante: tout sous-groupe abélien est cyclique; ils peuvent être classés en deux types: le 1° type comprend les groupes dont tous les sous-groupes de Sylow sont cycliques: ces groupes sont des extensions par un groupe cyclique de leur sous-groupe des commutateurs (également cyclique); le 2° type comprend ceux des groupes dont les 2-sous-groupes de Sylow ne sont pas cycliques (groupes quaternioniques généralisés); ces groupes peuvent être résolubles ou non résolubles, et seuls les premiers ont pu être étudiés de façon assez complète par l’A. Toute représentation d’un groupe quaternionique — et par suite d’un groupe du 2° type — est de degré $4k$: seules les sphères de dimension $n \equiv 3 \pmod{4}$ peuvent admettre des groupes de rotation du 2° type (il s’en présente effectivement pour $n = 3$); pour les autres dimensions, tout groupe est de 1° type; la théorie des extensions permet de construire explicitement ces groupes, et d’étudier assez complètement leurs représentations irréductibles: on obtient les résultats suivants: pour n pair, pas d’autre groupe que Z_2 (groupe d’ordre 2); pour $n = 4k + 1$, il y a une infinité de groupes du 1° type, et il s’en présente de nouveaux à chaque valeur de k . On retrouve par ces procédés les groupes fondamentaux déterminés par MM. Hopf, Seifert et Threlfall — des formes spatiales sphériques de dimension 3; l’A. énonce de même un grand nombre de résultats très variés (translations de Clifford, espace elliptique . . . etc.) qui généralisent parfois des théorèmes obtenus par voie topologique; mais ils ne donnent — évidemment — aucun procédé nouveau permettant d’attaquer le problème central de l’homéomorphie des variétés-quotients.

Thom (Strasbourg).

Jordan, P.: Über eine nicht-desarguessche ebene projektive Geometrie. *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* 16, 74—76 (1949).

Diejenigen Matrizen $a = (a_{\mu\nu})$ dritten Grades mit Matrix-Elementen aus dem Cayleyschen Alternativkörper, für die $a_{\mu\nu}^+ = a_{\nu\mu}$ gilt, werden als Elemente einer Algebra genommen, in der ein Produkt durch $a \cdot b = \frac{1}{2} (a \cdot b + b \cdot a)$ definiert ist, wo $a \cdot b$ das gewöhnliche Matrizenprodukt ist. (Ist $\xi = x_0 + x_1 \dot{j}_1 + \dots + x_7 \dot{j}_7$, mit reellen x_i , eine Cayley-Größe, so ist $\xi^+ = x_0 - x_1 \dot{j}_1 - \dots - x_7 \dot{j}_7$.) Die unzer-

legbaren Idempotente und die zerlegbaren Idempotente $\neq E$ dieser nichtassoziativen Algebra bilden, als Punkte und Geraden aufgefaßt, eine nicht-desarguessche projektive Geometrie, in der der Satz vom vollständigen Vierseit gilt (harmonische Geometrie im Sinne von R. Moufang). Bachmann (Kiel).

Elementargeometrie:

Cebrian, F.: Ein einfacher Beweis des Satzes von Legendre. *Euclides*, Madrid 9, 379 (1949) [Spanisch].

Crijns, L.: Über Erweiterungen der Dreiecksungleichung. *Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr.* 26, 135 (1949) [Holländisch].

L'A. ajoute à la note de van der Blij [Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. 25, 231—235 (1947); ce Zbl. 30, 241] le lemme suivant: Si pour tout triangle ABC , tel que $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, la relation $\overline{AC}^n + \overline{BC}^n \geq \alpha \cdot \overline{AB}^n$ est vraie, alors elle subsiste aussi si $\sphericalangle ACB < 90^\circ$. Horváth (Paris).

Ballieu, Robert: Sur des extensions de l'inégalité triangulaire. *Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr.* 26, 129—134 (1949).

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, γ l'angle opposé à c . L'expression $k = c^n/(a^n + b^n)$ ne dépend que du nombre réel n , de γ et de a/b . L'A. établit les limitations suivantes: 1. si $n < 0$: $0 < k \leq 2^{n-1} \sin^n(\gamma/2)$; 2. si $0 < n \leq 1$: $2^{n-1} \sin^n(\gamma/2) \leq k < 1$; 3. si $1 < n \leq 2$: $\min(1, 2^{n-1} \sin^n(\gamma/2)) \leq k \leq \max(2^{n-1} n^{-n/2}, 2^{n-1} \sin^n(\gamma/2))$; 4. si $2 \leq n$: $\min(2^{n-1} n^{-n/2}, 2^{n-1} \sin^n(\gamma/2)) \leq k \leq \max(1, 2^{n-1} \sin^n(\gamma/2))$. La limitation supérieure pour les cas $n \geq 2$ (n entier) a été établie par van der Blij [Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. 25, 231—235 (1947); ce Zbl. 30, 241].

Horváth (Paris).

Thébault, Victor: Recreational geometry. *Scripta math.*, New York 15, 82—88 (1949).

Nach einem historischen Rückblick auf die Unterhaltungsmathematik vom Altertum bis zur Gegenwart gibt Verf. einige Beispiele aus der Unterhaltungsgeometrie. Er bespricht die Eigenschaften des Arbelos oder „Schustermessers“ des Archimedes und verwandter Figuren und den Lehmusschen Satz. Dieser Satz besagt, daß aus der Gleichheit zweier inneren Winkelhalbierenden BD und CE des Dreiecks ABC die Gleichheit der Winkel ABC und ACB folgt. Trotz der Einfachheit seiner Voraussetzungen macht der rein elementargeometrische Beweis dieses Satzes erhebliche Schwierigkeiten. Seit Steiners Beweis 1844 (Werke 2, 321) ist infolgedessen eine reiche Literatur über den Satz entstanden. Verf. schließt mit einem von ihm gefundenen neuen Beweis von bemerkenswerter Einfachheit: Er legt das Teildreieck CAE so an BD , daß E mit B , C mit D zusammenfällt und A in die Lage A_1 kommt. Winkelbetrachtungen zeigen dann, daß AA_1BD ein Kreisviereck und AA_1 parallel DB ist. Als Wechselwinkel sind dann $\sphericalangle AA_1D = B/2$ und $\sphericalangle A_1DB = C/2$ einander gleich. Zacharias (Quedlinburg).

Thébault, Victor: On the Feuerbach points. *Amer. math. Monthly* 56, 546—547 (1949).

ABC sei ein Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt O und dem Inkreismittelpunkt J . D, E, F seien die Inkreisberührungspunkte mit den Seiten BC, CA, AB , G der Schwerpunkt, D', E', F' die Schnittpunkte der Gerade $d \equiv OJ$ mit EF, FD, DE und Z der „In-Feuerbachpunkt“, d. h. der Berührungspunkt des Feuerbachschen Kreises mit dem Inkreis. Nach Steiner liegen die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits auf einem Kreis (Verf. nennt ihn den Miquelkreis des Vierseits). In einem Punkt dieses Kreises schneiden sich, ebenfalls nach Steiner, jene vier Kreise (Verf. nennt ihn den Miquelpunkt des Vierseits). — Verf. beweist die Sätze: Der Miquelkreis des Vierseits $Q \equiv (DEF, d)$ geht durch den In-Feuerbachpunkt Z . Die Gerade ZM (M Miquelpunkt von Q) ist

die Potenzgerade des Inkreises und des Miquelkreises von Q . Die Punkte Z und M liegen symmetrisch bezüglich der Gerade JG . Die Parallelen durch D, E, F zu den Geraden B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 gehen durch den In-Feuerbachpunkt (A_1, B_1, C_1 die Orthogonalprojektionen von O auf AJ, BJ, CJ). Entsprechende Sätze gelten für die drei Außen-Feuerbachpunkte.

Zacharias (Quedlinburg).

Herrmann, Aloys: Quelques théorèmes sur la géométrie du triangle. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1055—1056 (1949).

Sind G_{AC} und G_{AB}, G_{BA} und G_{BC}, G_{CB} und G_{CA} drei Paare von Winkelgegengeraden des Dreiecks ABC und A', B', C' die Schnittpunkte von G_{BC} und G_{CB} , von G_{CA} und G_{AC} und von G_{AB} und G_{BA} , so gehen die drei Geraden AA', BB', CC' durch einen Punkt. Sind G_{AC} usw. insbesondere die Winkeldrittelnden, so ergibt sich, daß das Dreieck ABC und das gleichseitige Morleydreieck $A'B'C'$ perspektiv liegen (Bemerkung zum Ref.: Diese Sätze sind bekannt). Verf. behauptet (ohne Beweis): Wenn die Winkelgegengeraden G_{AC} usw. mit den inneren Winkelhalbierenden die Winkel $\alpha/2 + \pi/6, \beta/2 + \pi/6, \gamma/2 + \pi/6$ oder $\alpha/2 - \pi/6, \beta/2 - \pi/6, \gamma/2 - \pi/6$ bilden, so sind die beiden so bestimmten Dreiecke gleichseitig und perspektiv zu ABC . Allgemeiner behauptet er: Sind z_1, z_2, z_3 die Koordinaten der Ecken des Dreiecks ABC in der komplexen Ebene und Z_1, Z_2, Z_3 die Koordinaten der drei Punkte $A'B', C'$ und ist $Z_1 - z_2 = k_1(z_3 - z_2), Z_2 - z_3 = k_2(z_1 - z_3), Z_3 - z_1 = k_3(z_2 - z_1), k_2 = 1 + \varepsilon k_1, k_3 = 1 + \varepsilon k_2, k_1 = 1 + \varepsilon k_3$, wo ε eine der imaginären kubischen Wurzeln der Einheit bedeutet, so ist das Dreieck $A'B'C'$ gleichseitig, aber nur im Fall der Morleyschen Dreiecke auch dem Dreieck ABC perspektiv.

Zacharias.

Cavallaro, M. Vincenzo G.: Les triangles brosteinériens. An. Fac. Ci. Porto **33**, 65—81 (1948).

Es bezeichne V den Brocardschen Winkel eines nicht-gleichseitigen Dreiecks und V_1, V_2 die beiden Steinerschen Winkel. Zwischen diesen Winkeln besteht die Beziehung $2V + 2V_1 + 2V_2 = 180^\circ$. Ein Dreieck wird von Verf. ein Brosteinerisches Dreieck genannt, wenn die Dreieckswinkel darstellbar sind durch Ausdrücke vom Typus $\pm xV \pm yV_1 \pm zV_2$. Es stellt sich heraus, daß es eine ziemlich ausgedehnte Klasse von derartigen Dreiecken gibt, und Verf. leitet eine Fülle von Formeln her, aus denen man die Eigenschaften dieser Dreiecke ablesen kann.

J. C. H. Gerretsen (Groningen).

Gál, I. S.: A theorem concerning regular polygons. Bull. École Polytechn. Jassy **3**, 98—106 (1948).

En relation d'un théorème de Pompeiu [Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest **6**, 6—7 (1936); ce Zbl. **14**, 272] l'A. démontre l'inégalité suivante: Soit $(A_1 A_2 A_3 \dots A_n)$ un polygone régulier et P un point arbitraire dans le plan. Alors on a

$$\sum_{k=1}^n \overline{A_k P} \geq \frac{(\cos \pi/n)^{(1+(-1)^n)/2}}{\sin \pi/2n} \max_{(i)} (\overline{A_i P}) + \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] \min_{(i)} (\overline{A_i P}).$$

On a l'égalité seulement dans le cas où le polygone est inscriptible dans une circonférence et P est un point de cette courbe.

N. Obrechhoff (Sofia).

• **Berman, G. N.:** Die Zykloide. Moskau, Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1948. 115 S., 106 Abb., 1 Rubel [Russisch].

Eine unterhaltsame Plauderei über die Zykloide und die mit ihr verwandten Kurven (Epi- und Hypozykloiden, Kreisevolventen usw.), ihre wichtigsten geometrischen Eigenschaften sowie ihr Auftreten in Physik und Technik. Benutzt werden nur elementargeometrische Überlegungen.

W. Hahn (Berlin).

Sponder, Erich: Construction graphique de la tangente en un point d'une courbe. Elemente Math., Basel **4**, 86—88 (1949).

Für die von Pirani angegebene Näherungskonstruktion der Tangente in einem Kurvenpunkt liefert Verf. eine konstruktive Verbesserung und weist nach,

daß diese mit der von A. Walther und Th. Zech berechneten übereinstimmt.
R. Ludwig (Braunschweig).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Sz. Nagy, Gyula: Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 13, 1—13 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 31, 69) leitet Verf. neue Eigenschaften der Lemniskaten durch Untersuchung der konformen Abbildung $w = f(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ab; den Kreisen der w -Ebene (Riemannsche Fläche!) $|w - w_0| = \rho^n$ entsprechen Lemniskaten n -ten Grades mit dem Halbmesser ρ . Einem speziellen Werte von w entsprechen n Punkte z , die im allgemeinen voneinander verschieden sind und „Polgruppe“ heißen; darunter sind ausgezeichnet die Gruppe der Mittelpunkte ($w = w_0$) und die auf der Lemniskate liegenden „Hauptgruppen“ ($w = w_0 + \rho^n e^{2\pi i}$). Konjugierten Punkten bezüglich des Kreises entsprechen konjugierte Polgruppen bezüglich der Lemniskate. Orthogonal sich schneidenden Kreisen entsprechen orthogonal sich schneidende Lemniskaten, konzentrischen Kreisen konzentrische Lemniskaten. Der Satz von den Peripheriewinkeln eines Kreises liefert einen ähnlichen Satz über die Hauptgruppen einer Lemniskate. Ebenso lassen sich die Begriffe Doppelverhältnis, Potenz usw. auf Lemniskaten übertragen.
Gröbner (Innsbruck).

Sz. Nagy, Gyula: Über die Lemniskatenflächen. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 2, 39—53 (1950).

Übertragung der Arbeit desselben Verf. (dies. Zbl. 31, 69) über allgemeine Lemniskaten auf den dreidimensionalen Raum, wo eine Lemniskatenfläche ganz analog als Ort aller Punkte P definiert wird, deren Abstände von n festen Punkten (Mittelpunkte) Q_1, \dots, Q_n (die zum Teil auch zusammenfallen dürfen) ein konstantes Produkt $\prod |PQ_i| = \rho^n$ ergeben. Das ist eine ganz im Endlichen liegende algebraische Fläche $2n$ -ter Ordnung, die n -fach durch den absoluten Kreis geht. Lemniskatenflächen mit denselben Mittelpunkten heißen konzentrisch. Wie bei den Kurven liegen die eventuellen singulären Punkte innerhalb der konvexen Hülle H der Mittelpunkte; alle Flächennormalen gehen durch H . Verf. untersucht ferner die sternartigen Lemniskatenflächen, Wendetangenten, und grenzt durch Kugeln den Bereich ab, innerhalb dessen die Fläche liegt. Ist der Radius ρ genügend klein, so besteht die Lemniskatenfläche aus einzelnen kugelförmigen Schalen, welche die Mittelpunkte einschließen; wächst ρ , so wird die Anzahl der Schalen kleiner, bis endlich nurmehr eine vorhanden ist. Auch die Begriffe Potenz und Potenzfläche (vgl. vorsteh. Referat) lassen sich auf Lemniskatenflächen übertragen.

Gröbner (Innsbruck).

Bagehi, Haridas: Note on critic centres and coincidence points of cubic curves. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 73—75 (1949).

Verf. nennt ein Dreieck ABC selbstkonjugiert bezüglich einer kubischen Kurve, wenn zu jedem Eckpunkt die gegenüberliegende Seite die zweite Polare ist. Er nennt es ein Hartsches Dreieck, wenn die zu den Eckpunkten gehörigen Tangentialpunkte der Reihe nach entweder C, A, B oder B, C, A sind. Ist H die Hessesche Kurve der bikursalen Kurve dritter Ordnung, so enthält das syzygetische Büschel der Kurven $\lambda \Gamma + \mu H = 0$, wie bekannt, die vier syzygetischen Dreiecke, welche mit Δ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) bezeichnet werden mögen. Verf. befaßt sich mit der Konfiguration dieser vier Dreiecke. Seine Untersuchung stützt sich auf das Büschel kubischer Kurven, welche durch die 9 Eckpunkte drei solcher Dreiecke durchgehen. — Es wird bewiesen, daß das Büschel kubischer Kurven, welche durch die 9 Punkte der Dreiecke $\Delta_l, \Delta_m, \Delta_n$ gehen, ein solches äquianharmonisches Kurvenpaar S_k, T_k enthält, welches $\Delta_l, \Delta_m, \Delta_n$ als gemeinsame Hartsche Dreiecke hat und dessen gemeinsames selbstkonjugiertes Dreieck Δ_k ist.

F. Kárteszi (Budapest).

Rodeja F., E. G.: Aire de l'ellipse déterminée par cinq points. Comment. math. Helvetici **20**, 172—176 (1947).

Verf. stellt sich die Aufgabe, den Flächeninhalt der durch fünf gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5 bestimmten Ellipse als Funktion der Flächeninhalte der zehn Dreiecke (1 2 3), (1 2 4), ..., (3 4 5) auszudrücken. Da die gesuchte Formel bei affiner Transformation invariant bleibt, so genügt es, die Formel für den Kreis zu bestimmen. Ausgehend von der Formel $4r = abc/F$ für den Umkreisradius r eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c und dem Flächeninhalt F entwickelt Verf. eine Formel für die Länge einer der zehn Strecken (1 2), (1 3), ..., (4 5) als Funktion des Umkreisradius r und der Inhalte der zehn Dreiecke (1 2 3), (1 2 4), ..., (3 4 5). Indem er die aus dieser Formel folgenden Werte für (1 2), (2 3), (3 1) in die Heronische Inhaltsformel für das Dreieck (1 2 3) einsetzt und aus dieser Gleichung r und dann πr^2 berechnet, erhält er schließlich für den Kreisinhalt und damit auch für den Ellipseninhalt A den Ausdruck

$$A = 4\pi P \left[(\sqrt{L} + \sqrt{M} + \sqrt{N}) (-\sqrt{L} + \sqrt{M} + (\sqrt{N})\sqrt{L} - \sqrt{M} + \sqrt{N})(\sqrt{L} + \sqrt{M} - \sqrt{N}) \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Darin bedeutet P das Produkt der Flächeninhalte aller zehn Dreiecke, und es ist $L = (1\ 2\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4\ 5)$, $M = (2\ 3\ 4)(2\ 3\ 5)(1\ 4\ 5)$, $N = (3\ 1\ 4)(3\ 1\ 5)(2\ 4\ 5)$.

Zacharias (Quedlinburg).

Vektor- und Tensorrechnung:

Walker, M. J.: A geometrical introduction to tensor analysis for the physicist. Amer. J. Phys. **17**, 5—15 (1949).

The purpose of this paper is to visualise geometrically the operations of tensor analysis. Starting with an affine coordinate system in a euclidean plane a geometrical interpretation is given of the contravariant and covariant components of a vector from which the transformation law and the formel for the length $(\sqrt{u^i u_i})$ can be derived. Several of the notions as covariant derivative, geodesic and parallelism are illustrated by considering semilog paper as a model of a flat Riemannian space. Formel (44) is incorrect.

J. Haantjes (Leiden).

Berker, Ratip: Sur certaines propriétés du rotationnel d'un champ vectoriel qui est nul sur la frontière de son domaine de définition. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1630—1632 (1949).

Verf. teilt Sätze über räumliche Vektorfelder mit, die für die Hydrodynamik von Bedeutung sind (vgl. auch Kampé de Fériet, dies. Zbl. **29**, 263). Es sei G ein einfach zusammenhängendes räumliches Gebiet, das von einer regulären Fläche S begrenzt wird. Der Geschwindigkeitsvektor $v(x, y, z, t)$ verschwinde auf S , und in G sei $\operatorname{div} v = 0$ (inkompressible Flüssigkeit). — 1. Besitzen die Komponenten von v in $G + S$ stetige erste Ableitungen nach x, y, z , und ist a ein Vektorfeld, das in $G + S$ stetige zweite Ableitungen besitzt und den Bedingungen $\Delta a = 0$ und $\operatorname{div} a = 0$ genügt, dann ist der Wirbel w des Feldes v orthogonal zu a , $\int_G a w d\tau = 0$.

2. Ist v ein Geschwindigkeitsfeld, a ein Vektorfeld, beide mit stetigen ersten Ableitungen in $G + S$, und ist $a = \operatorname{grad} f$, dann gilt $\int_G a w d\tau = 0$, auch wenn $\operatorname{div} v \neq 0$ ist. 3. Ist v ein Geschwindigkeitsfeld mit stetigen ersten Ableitungen in $G + S$, $a = \operatorname{grad} f$ ein Vektorfeld mit stetigen Komponenten in $G + S$, dann ist $\int_G a w d\tau = 0$. Besitzen v und a stetige erste Ableitungen, so folgen daraus die bekannten Beziehungen

$$\int_G (w \times v) d\tau = 0, \quad \int_G [r \times (w \times v)] d\tau = 0.$$

4. Ist v ein Geschwindigkeitsfeld mit stetigen ersten Ableitungen, und q eine in G

harmonische Funktion, dann ist $\int_G (\mathfrak{w} \times \text{grad } \varphi) d\tau = 0$. Auf Grund des letzten Satzes kann gezeigt werden, daß das Geschwindigkeitsfeld \mathfrak{v} vermöge

$$\mathfrak{v} = \text{rot } \mathfrak{W} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{W} = \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{\mathfrak{w}}{r} d\tau$$

aus dem Wirbelfeld bestimmt werden kann.

Quade (Hannover).

Berker, Ratip: Sur certaines propriétés du rotationnel d'un champ vectoriel qui est nul sur la frontière de son domaine de définition. Bull. Sci. math., II. S. 73I, 163—176 (1949).

Über eine zusammenfassende Darstellung dieser Abhandlung wird im vorsteh. Referat berichtet.

Quade (Hannover).

Julia, Gaston: Sur des systèmes de vecteurs généralisant les systèmes ortho-normaux. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 168—170 (1948).

Es wird die Aufgabe behandelt, $n + p$ Vektoren A_1, \dots, A_{n+p} im n -dimensionalen Raum E_n so zu bestimmen, daß

$$\left| \sum_{k=1}^{n+p} x_k A_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{n+p} |x_k|^2$$

gilt für alle komplexen x_k , die gewissen p linear unabhängigen Relationen genügen. Es folgt ein Beweis eines Satzes von Hadwiger, in dem es darauf ankommt, alle Vektoren A_1, \dots, A_{n+p} von E_n zu bestimmen, derart, daß für jedes $X \in E_n$ gilt

$$X = \sum_{k=1}^{n+p} (A_k, X) A_k.$$

Schmeidler (Berlin).

Hulubei, Dan: Déplacements dans un espace Euclidien à 4 dimensions. Disqu. math. phys., București 6, 129—136 (1948).

Die Arbeit ist angeregt durch eine Abhandlung von Richard Woinaroski [Disqu. math. phys., București 4, 175—239 (1945)]. Verf. entwickelt zuerst in sehr einfacher Art die Theorie der Momentanruhörter einer starren Bewegung des euklidischen R_{2n} . Allgemeine Verhältnisse vorausgesetzt, gibt es bekanntlich bei einer starren Momentanbewegung des R_{2n} einen Momentanpol O (Punkt der Geschwindigkeit Null). Ordnet man jedem Punkte P des R_{2n} den zu seiner Bahnrichtung normalen Raum Π der Dimension $2n-1$ zu, so entsteht in R_{2n} eine Nullkorrelation, die notwendig singular ist; die Normalräume R_{2n-1} gehen alle durch das Momentanzentrum O . — Verf. wendet sich dann dem eigentlichen Gegenstande zu, den Momentanbewegungen des R_4 , die (im angenommenen allgemeinen Falle) ein Momentanzentrum O besitzen, durch das die Bahnnormalräume Π aller Raumpunkte P hindurch laufen, wobei die Zuordnung (P, Π) eine Nullkorrelation in R_4 ist. Es gilt der Satz: Projiziert man die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte P eines festen R_3 auf diesen R_3 , so erhält man in dem R_3 das System der Geschwindigkeitsvektoren einer starren dreidimensionalen Bewegung; deren Bahnnormalebene π erhält man, indem man den Bahnnormalraum Π von P bei der R_4 -Bewegung mit dem festen R_3 schneidet. Projiziert man das so in dem festen R_3 entstehende Nullsystem (P, π) aus dem Momentanzentrum O des R_4 , so erhält man durch die Zuordnung der Geraden $[OP]$ zu den Räumen $[O\pi] = [O\Pi]$ ein Fokalsystem, das von der Wahl des speziellen festen R_3 unabhängig ist. Auf dieses schon von Woinaroski benutzte Fokalsystem kann man die ganze Theorie des dreidimensionalen Nullsystems übertragen (konjugierte Ebenen, selbstkonjugierte Ebenen, Erzeugungsweisen von Staudt, Sylvester, Chasles usw.) und erhält so in einfachster Art die von R. Woinaroski dargestellte Fokaltheorie der Momentanbewegungen des euklidischen R_4 .

K. Strubecker (Karlsruhe).

Bottema, O.: On Cardan positions for the plane motion of a rigid body. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 643—651 (1949).

Im Anschluß an eine Diskussion früherer Autoren [vgl. Alt, Die Kardan-lagen von Getriebegliedern und die Krümmung der Polkurven, Ingenieur-Arch. 14,

319—331 (1944)] wird auf analytischem Wege die „Cardanlage“ einer bewegten Ebene untersucht, die darin besteht, daß ein Kontakt dritter Ordnung mit einer elliptischen Cardanischen Bewegung vorliegt. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Cardanlage werden angegeben, und zwar in verschiedenen Formulierungen. Im Gegensatz zu Alt wird festgestellt, daß es Bewegungen gibt, für die keine Cardanlagen existieren. *Schmeidler* (Berlin).

Eremeev, N. V.: Über die Bedingungen des Satzes von Roberts-Čebyšev. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva **13**, 115—116 (1949) [Russisch].

Un théorème connu de Roberts-Tchebycheff établit la possibilité de décrire une même ligne au moyen de trois mécanismes à quatre tiges articulées. L'A. complète cet énoncé en indiquant une condition nécessaire et suffisante pour en assurer la validité. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

Dizioğlu, Bekir: Zur Kinematik getriebebeweglicher Kupplungen. *Bull. Techn. Univ. Istanbul* **1**, 11—28 und türkische Zusammenfassg. 11 (1948).

Verf. gibt zunächst in der Einleitung eine Übersicht über die verschiedenen Gruppen von Kupplungen und zeigt, wie die getriebebeweglichen Kupplungen aus jenen mit nachgiebigen Zwischengliedern hervorgehen, und führt dies im folgenden an Hand der Schraubenfeder- bzw. Schleppkurbel näher aus. Dabei zeigt er auch an mehreren Beispielen, wie sich durch Einschalten von Zwischengliedern ohne Veränderung des Freiheitsgrades die Punktberührung stets durch Flächenberührung ersetzen läßt. — Der wesentliche Inhalt der vorliegenden Arbeit liegt aber in der getriebetechnischen Begründung der genannten Kupplungen, die nach einer entsprechenden Umformung der Grüblerschen Beweglichkeitskriterien für ebene und räumliche geschlossene kinematische Ketten im Abschnitt 4 durch deren kinematische Analyse im Abschnitt 5 geleistet wird. Hierbei legt Verf. vier-, sechs- und achtgliedrige ebene kinematische Ketten, mit parallelen Drehachsen, letztere auch mit einem quaternären Gliede, seiner Analyse zugrunde und zeigt hierbei nicht nur, wie man bereits bewährte Kupplungen der Praxis diesem Schema einordnen, sondern durch geeignete Modifikationen, wie sie den Gesichtspunkten der einleitenden Abschnitte entsprechen, neue querbewegliche oder auch räumliche Kupplungen gewünschter Beweglichkeit erhalten kann. Geht man statt von ebenen Ketten von solchen aus, deren Achsen sich sämtlich in einem Punkte schneiden, so erhält man die Fülle der sphärischen Kupplungen, auf die sich ebenfalls die oben für ebene Ketten vorgeschlagenen Abänderungen anwenden ließen; dies eröffnet den Ausblick auf ein weites, zur Zeit noch wenig bearbeitetes Teilgebiet der technischen Kinematik. *Karas* (Darmstadt).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Vignier, Gabriel: Les développantes généralisées du second ordre d'une courbe plane. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **229**, 462—464 (1949).

Verf. geht von einer ebenen Kurve (M) und einer ihr zugeordneten Kurve (L) aus. Die beiden Kurven seien auf denselben Parameter t bezogen, wodurch auch die Punkte von (L) und (M) aufeinander bezogen sind. Wird auf der Tangente eines Punktes (M) von M die durch $MN = \tau(t)$ bestimmte Strecke abgetragen, so erhält man die verallgemeinerte Evolvente (N) von (M). Auf der Tangente von (N) im Punkte N werde die Strecke NP gemäß $NP = \gamma(t)$ abgetragen. Die Tangente der so erhaltenen Kurve (P) im Punkte P muß durch denjenigen Punkt L von (L) gehen, der dem Ausgangspunkt M von (M) entspricht. Die Kurve (P) bezeichnet Verf. als verallgemeinerte Evolvente zweiter Ordnung über der Kurvenbasis (M). Verf. behandelt dann den Spezialfall, daß (P) eine Evolvente von (N) im klassischen Sinne ist. In diesem Falle ist $\tau(t)$ durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt, und es muß, wenn σ_1 die Bogenlänge auf (N) bedeutet, $\gamma(t) = -\sigma_1(t)$

sein. Im zweiten Spezialfall bestimmt Verf. die Evolvente (P), falls die Normale von (N) im Punkte N durch den Punkt L geht. Die Rechnung kommt auf die Lösung einer Riccatischen Gleichung hinaus. *O. Varga* (Debrecen).

Viguier, Gabriel: *Canonisation géométrique spatiale de l'équation de Riccati*. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1073—1074 (1948).

Die Schmiegeebene im Punkte M einer gegebenen Kurve $M(t)$ schneide eine andere gegebene Kurve $L(t)$ im Punkte L . Die Punkte M und L mögen beide demselben Werte t des Parameters entsprechen. Auf der Tangente in M werde $MN = \tau(t)$ abgetragen, so daß N eine Kurve $N(t)$ beschreibt. Soll die Tangente in N an $N(t)$ durch den Punkt L gehen, so muß $\tau(t)$ einer Riccatischen Gleichung genügen, deren Integration übrigens eine einparametrische Schar von Kurven $N(t)$ festlegt, die alle die geforderte Eigenschaft haben und die Verf. als verallgemeinerte räumliche Evolventen bezeichnet. Umgekehrt kann bei vorgegebener Riccati-Gleichung und geeigneter Parameterwahl einer Kurve $M(t)$ eine Schar verallgemeinerter Evolventen zugeordnet werden, womit eine geometrische Deutung des Integrationsproblems gewonnen ist. *R. Ullrich* (Kiel).

Marcus, F.: *Un teorema di geometria differenziale*. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 109—111 (1949).

Es seien $r_1 = r_1(u, v)$, $r_2 = r_2(u, v)$ zwei Flächen S_1 , S_2 , auf denen u , v die Krümmungslinien darstellen. Verf. zeigt, daß der Vektor $r_1 - r_2$, wenn er auf der Fläche S_1 senkrecht steht, auch auf der Fläche S_2 senkrecht steht, ausgenommen den Fall, daß die beiden Flächen Gesimsflächen sind. *Volk* (Würzburg).

Marcus, Fred: *Sulle superficie a curvatura totale costante*. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **7**, 199—202 (1950).

Als Umkehrung eines bekannten Satzes beweist Verf.: Sind zwei Flächen, die beide nur elliptisch oder nur hyperbolisch gekrümmt sind, flächentreu so aufeinander bezogen, daß sich die konjugierten Systeme sowie die Krümmungslinien entsprechen, derart, daß die Hauptkrümmungsradien in entsprechenden Punkten gleich, aber vertauscht sind, so haben sie konstante Gaußsche Krümmung. *Gericke* (Freiburg).

Lalan, V.: *Les surfaces envisagées dans leurs rapports avec leurs lignes minima*. Bull. Soc. math. France **76**, 20—48 (1948).

Verf. untersucht zunächst die Bestimmung einer Fläche bei gegebenen Pfaffschen Formen ω_1 und ω_2 , deren Verschwinden die isotropen Kurven der Fläche definieren. Die von E. Cartan in die Flächentheorie eingeführten Methoden führen in diesem Falle auf ein Pfaffsches System für die unbekannten Funktionen A , H , ϱ , äquivalent den Gauß-Codazzi-Mainardischen Relationen. A ist die Asphärität der Fläche, H deren mittlere Krümmung und ϱ ist durch den Ausdruck $2A \frac{H_{n_0}}{H_n H_0}$ gegeben.

Durch äußere Ableitung zweier der Gleichungen des Pfaffschen Systems ergeben sich zwei Fallunterscheidungen, je nachdem eine gewisse Linearkombination $\chi = a\omega_1 + b\omega_2$ der beiden „formes minima“ ω_1 und ω_2 ein exaktes Differential ist oder nicht. Im ersten Falle ergibt sich eine quadratische Relation zwischen A und H . — Gibt es (mindestens) zwei Flächen mit entsprechenden isotropen Kurven, so wird die „konform-isotrope Abbildung“ genannte Punktkorrespondenz eines solchen Flächenpaares von besonderem Interesse. Sie ist nicht nur konform (da die isotropen Kurven beider Flächen einander entsprechen, sondern auch „quasilängentreu“, sofern die „Quasibogenlängen“ (Study-Vessiotischen Parameter) der isotropen Kurven bei dieser Abbildung erhalten bleiben. — Die Klasse derartiger Flächenpaare hängt von willkürlichen Funktionen eines Argumentes ab. — Nach eingehender Untersuchung des mit konform-isotropen Abbildungen verknüpften Cauchyschen Anfangwertproblems und der zugehörigen Charakteristiken (isotrope Kurven und Kurven konstanter mittlerer Krümmung) wird ein Verfahren entwickelt, die konform-isotrope Bildfläche S zu bestimmen, wenn die Urbildfläche S

gegeben ist. Dabei ergeben sich interessante Zusammenhänge mit der Theorie der Flächen mittlerer isothermer Krümmung, mit gewissen bereits von O. Bonnet behandelten Flächen sowie mit den sogenannten Flächen „zweiter Klasse“ von E. Cartan [Bull. Sci. math., II. S. 66, 55—85 (1943); dies. Zbl. 27, 89]. — Als Spezialfälle stellen sich in diesem Zusammenhang noch ein: Drehflächen, Zylinder und O. Bonnets Flächen „dritter Klasse“. — Zum Schluß wird die allgemein entwickelte Theorie auf zahlreiche spezielle Flächenklassen angewendet, insbesondere auf Torsen und Flächen konstanter mittlerer Krümmung. *M. Pinl (Dacca).*

Bouchout, V. van: Ein Satz über Sechseck-Gewebe. Simon Stevin, wis. natuurrk. Tijdschr. 26, 143—148 (1949) [Holländisch].

Wenn eine Kurvenschar in der Ebene mit zwei Scharen isogonaler Trajektorien ein Sechseckgewebe bildet, so ist sie isotherm. Umgekehrt bildet eine isotherme Kurvenschar mit je zwei Scharen isogonaler Trajektorien ein Sechseckgewebe. Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von W. Blaschke und J. Dubourdieu [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 6, 198—215 (1928)]. Dort wird die entsprechende Behauptung für Schnittwinkel von 60° bewiesen. Aus diesem Sonderfall läßt sich im übrigen der allgemeine Satz leicht folgern, wenn man berücksichtigt, daß drei Doppelverhältnisscharen eines Sechseckgewebes stets wieder ein Sechseckgewebe bilden. *Bol (Freiburg i. Br.).*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Bompiani, E.: Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 145—151 (1949).

Gegeben sei eine eindeutige Abbildung zweier Ebenen π und π aufeinander, O und \bar{O} seien entsprechende reguläre Punkte, K und \bar{K} entsprechende Kurven durch O und \bar{O} mit den Tangenten t und \bar{t} . s und \bar{s} seien entsprechende Richtungen durch O und \bar{O} , die nicht längs t bzw. \bar{t} fallen sollen. Wir projizieren K auf t aus einem von O verschiedenen Punkt P der Geraden durch O mit der Richtung s , ebenso \bar{K} auf \bar{t} aus einem Punkte Q der Geraden durch \bar{O} mit der Richtung \bar{s} . Da K und \bar{K} eindeutig aufeinander bezogen sind, erhält man eine bei O eindeutige Abbildung von t auf \bar{t} ; diese kann man in der Umgebung von O in zweiter Ordnung durch eine Projektivität annähern. Die so definierte Projektivität von t auf \bar{t} hängt nur von s , aber nicht von der Wahl von P und Q auf ihren Geraden ab. Sie hängt nur vom Kurvenelement erster Ordnung von K ab (nicht vom Element zweiter Ordnung, wie man erwarten würde). Sie ist dann und nur dann von der Wahl von s unabhängig, wenn t eine Inflexionsrichtung der Abbildung ist. — Vertauscht man die Rollen der Richtungen t und s , so erhält man auf beiden Tangenten eine Projektivität, diese lassen sich eindeutig zu einer Projektivität von π auf π zusammenbauen, bei der sich Richtungen durch O und \bar{O} entsprechen, die bei der vorgegebenen Abbildung zusammengehören. — Verallgemeinerungen auf n Geraden im R_n und auf eine Geradenrichtung und eine Hyperebenenrichtung. *Bol (Freiburg i. Br.).*

Vaona, Guido: Trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 194—197 (1949).

Verf. untersucht eine Punkttransformation zwischen zwei Ebenen in einem regulären Paar entsprechender Punkte, wo die charakteristischen Richtungen unbestimmt sind (so daß die Transformation bis zur Umgebung 2. Ordnung durch eine Homographie approximiert wird). Zur Bestimmung intrinsiker projektiver Beziehungen benutzt Verf. zunächst die Inflexionsgeraden 2. Art, die von Ref. (dies. Zbl. 31, 272) eingeführt worden sind. Er gibt eine geometrische Interpretation der auf die Umgebung 3. Ordnung bezüglichen Invarianten der Transformation. Durch

Betrachtung der Umgebung 4. Ordnung, nach einem Verfahren, das dem des Ref. (dies. Zbl. **31**, 265) analog ist, gelangt Verf. schrittweise zur Definition einer mit der Transformation verknüpften Kurve 5. Ordnung. Diese Elemente gestatten es, intrinseke Beziehungen zu bestimmen. Verf. dehnt dann die erhaltenen Resultate auf den Fall aus, daß eine Homographie existiert, die die Transformation bis zur Umgebung der Ordnung $s > 2$ approximiert, und erhält auch hier eine gewisse algebraische Kurve der Ordnung $s + 3$, die mit der Transformation verknüpft ist.

Mario Villa (Bologna).

Rollero, Aldo: Un nuovo riferimento intrinseco per le trasformazioni puntuali fra piani proiettivi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 213—216 (1949).

Intrinseke projektive Beziehungen für Punkttransformationen zwischen zwei Ebenen in einem regulären Paar entsprechender Punkte sind zuerst vom Ref. [Atti Accad. Italia, Rend., VII. S. **3**, 718—724 (1942); dies. Zbl. **27**, 348] und E. Bompiani [Atti Accad. Italia, Mem., VI. S. **13**, 837—848 (1942)] bestimmt worden. Für Punkttransformationen zwischen zwei linearen Räumen S_r sind intrinseke Beziehungen mit einem, auch für $r = 2$, von dem früheren abweichenden Verfahren vom Ref. (dies. Zbl. **30**, 216) bestimmt worden. Immer für $r = 2$, bestimmt Verf. neue intrinseke Beziehungen, indem er ein Resultat von E. Bompiani (dies. Zbl. **34**, 389) anwendet.

Mario Villa (Bologna).

Rollero, Aldo: Riferimento intrinseco per lo studio locale delle trasformazioni puntuali fra due S_3 . Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 45—48 (1949).

Intrinseke projektive Beziehungen für die Punkttransformationen zwischen zwei linearen Räumen S_r in einem regulären Paar entsprechender Punkte sind vom Ref. (dies. Zbl. **30**, 216) bestimmt worden. Für $r = 3$ bestimmt Verf. andere intrinseke Beziehungen mittels der Büschel von Darbouxschen Quadriken bezüglich gewisser Flächenkalotten 3. Ordnung.

Mario Villa (Bologna).

Rollero, Aldo: Punto doppio delle superficie. Mat., Catania **3**, 111—118 (1948).

L'A. montre qu'une surface cubique F^3 ayant un point double général de son espèce a son équation réductible à la forme

$$z^2 + xy(x + y - 1) + z(a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy) = 0$$

où a_{20} , a_{02} , a_{11} sont les trois invariants de la surface relativement au groupe des homographies; les plans tangents à F^3 en $A_1(1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0, 0)$ ont les équations respectives $y + a_{20}z = 0$, $x + a_{02}z = 0$; la quadrique polaire de A_1 (ou A_2) par rapport à F^3 est coupée par $x = 0$ (ou $y = 0$) d'abord suivant la droite $y = x = 0$, puis suivant la droite $y + a_{11}z - 1 = 0$ (ou $x + a_{11}z - 1 = 0$); $a_{20} = 0$ (ou $a_{02} = 0$) signifie qu'il y a un point double en $(1, 0, 0, 1)$ [ou $(0, 1, 0, 1)$]; $a_{11} = 0$, si $a_{02}a_{20} \neq 0$, est la condition nécessaire et suffisante afin que les 2 plans passant par $x = y = 0$ et chacune des tangentes asymptotiques en $A_3(0, 0, 1, 0)$ divisent harmoniquement les plans $x = 0$, $y = 0$. Il y a 30 façons d'obtenir cette forme réduite. — Pour une surface F non cubique ayant un point double général en $0(0, 0, 0, 1)$ on peut obtenir la représentation

$$xy = z^2 + (1 - a_{10})x^2y + (1 - a_{01})xy^2 + z\left\{\frac{4\sigma_1 + \sigma_2 - 20\sigma}{45}x^2 + \frac{17\sigma - \sigma_1 - \sigma_2}{9}xy + \frac{\sigma_1 + 4\sigma_2 - 20\sigma}{45}y^2\right\} + z^3\{a_{10}x + a_{01}y\} + z^3\varphi_0 + \Phi_4(x, y, z) + \dots$$

où tous les coefficients ont une signification invariante. *B. Gambier (Paris).*

Buzano, Piero: Corrispondenze fra curve piane ed evolventi proiettive. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I **81/82**, 102—108 (1948).

Verf. hat (dies. Zbl. **23**, 363) Tripel von ebenen Kurven C_1 , C_2 , C_3 untersucht, die so aufeinander bezogen sind, daß die Tangenten durch drei entsprechende Punkte P_1 , P_2 , P_3 durch einen (veränderlichen) Punkt R gehen. Verf. nimmt die Unter-

sue ricerca di questa configurazione nuovamente, in quanto che egli la produce nel modo seguente: Se una curva C è data e su ciascuna delle sue tangenti tre punti A_1, A_2, A_3 sono fissati, allora considera egli le tangenti alle traiettorie di questi tre punti: il triangolo P_1, P_2, P_3 ha queste tre tangenti come lati, e le curve C_1, C_2, C_3 vengono definite dai punti P_1, P_2, P_3 . In questo modo il Prof. arriva ad un lavoro di A. R. Jerbert [Amer. J. Math. **51**, 99—108 (1929)] su qualunque curva tripla e determina il significato geometrico delle tre invarianti proiettive della configurazione. Il Prof. si sofferma su alcuni casi speciali, tra cui il caso notevole, che quello dei punti A_1, A_2, A_3 descritti sulle traiettorie proiettive evolventi 2.° della curva C (vgl. Cartan, dies. Zbl. **16**, 76) sono.

Mario Villa (Bologna).

Marcus, F.: *Sopra una classe di reti e di superficie, in relazione con le congruenze di rette di Waelsh*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 2, 408—410 (1947).

Data una superficie $x(u, v)$ determinata dal sistema completamente integrabile

$$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0, \quad x_{uu} + m x_{vv} + p x_u + q x_v + r x = 0,$$

siano x_i, x_{-i} le trasformate successive di Laplace di x , nel senso delle curve v ed u . Se $(x x_i)$ sono le coordinate plückeriane del raggio di una congruenza di rette che ha come falde focali x, x_i , l'A. determina le condizioni perché le rette $(x x_i), (x x_{-1})$ descrivano delle congruenze di Waelsh (Una congruenza di rette è di Waelsh se alle linee asintotiche di una falda focale corrispondono sull'altra un sistema di curve coniugate). L'A. determina pure le condizioni perché le tangenti coniugate di una superficie descrivano congruenze di Waelsh. Dimostra inoltre che la rete determinata da una tale superficie e dalle sue successive trasformate di Laplace, quando i relativi invarianti di Darboux siano uguali, è una rete isoterma-coniugata.

Mario Villa (Bologna).

Marcus, F.: *Sopra una classe di congruenze di rette proiettivamente applicabili*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 2, 764—766 (1947).

Le condizioni affinché, due congruenze di rette proiettive l'una sull'altra siano avvolgibili, sono state determinate da Fubini (vgl. G. Fubini, E. Čech, Geometria proiettiva differenziale, vol. II, Bologna 1927, p. 600—601). Il Prof. applica queste condizioni e determina una nuova classe di congruenze di rette avvolgibili.

Mario Villa (Bologna).

Hsiung, Chuan-Chih: *Rectilinear congruences*. Trans. Amer. math. Soc. **66**, 419—439 (1949).

Studio delle congruenze di rette in S_3 proiettivo che approfondisce quello del Wilczynski. La congruenza è rappresentata mediante un sistema completamente integrabile di equazioni a derivate parziali in cui figurano le superficie focali, delle quali sono studiate le linee di Darboux e di Segre, le quadriche di Moutard, i sistemi coniugati focali. Studio di alcune congruenze associate alla data.

E. Bompiani (Roma).

Cossu, Aldo: *Trasformazioni conformi in una coppia di punti corrispondenti e nei punti dei loro intorno del primo ordine*. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 122—127 (1949).

L'A. dimostra che una trasformazione puntuale tra due piani è conforme in due punti corrispondenti O, O' e in quelli dei loro intorno del 1.° ordine solo quando la corrispondenza fra i centri di curvatura di elementi curvilinei appartenenti ad O e O' è l'omografia caratteristica relativa alle rette isotrope inflessionali. Il risultato viene esteso agli iperspazi.

P. Buzano (Torino).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Vranceanu, Georges: Sur les espaces à connexion à groupe maximum des transformations en eux-mêmes. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 543—545 (1949).

Verf. bewies in seinen „Leçons de géométrie différentielle“ (Bucarest 1947; dies. Zbl. 34, 249), daß für einen affinzusammenhängenden Raum A_n mit nicht verschwindendem Krümmungsaffinor eine Transformationsgruppe des Raumes in sich höchstens von n^2 Parametern abhängen kann. In einer weiteren Untersuchung [Bull. Sci. Acad. R. P. R., Bucarest 1949] wies er nach, daß Transformationsgruppen mit dieser maximalen Parameterzahl nur im Falle einer projektiv-euklidischen Mannigfaltigkeit (d. h. Mannigfaltigkeit mit verschwindendem Weylschen Affinor) vorhanden sind. In der gegenwärtigen Arbeit beschäftigt sich Verf. mit dem Fall, einer nicht-projektiv-euklidischen Mannigfaltigkeit. Er beweist, daß eine solche Mannigfaltigkeit, die projektiv- oder affinzusammenhängend ist, eine Transformationsgruppe in sich besitzt, die höchstens von $n^2 - 2n + 5$ oder $n^2 - 3n + 8$ Parametern abhängt, je nachdem ob für voneinander verschiedene Wertesysteme a, b, c, d sämtliche Komponenten γ_{bcd}^a des Krümmungsaffinors verschwinden oder nicht. Daß die beiden maximalen Fälle auftreten, wird durch explizite Angabe von zwei Zusammenhängen belegt.

O. Varga (Debrecen).

Egorov, I. P.: Über die Bewegungsgruppen von Räumen von nichtsymmetrischem affinem Zusammenhang. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 621—624 (1949) [Russisch].

Es seien x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) die Koordinaten in einem Raum, in dem ein affiner Zusammenhang ohne Symmetrie besteht: $A_{[\beta\gamma]}^\alpha \neq 0$. Kovariante Ableitung wird mit den Größen $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = A_{(\beta\gamma)}^\alpha$ gebildet. D_α sei die auf den Torsionstensor $\Omega_{\beta\gamma}^\alpha = A_{[\beta\gamma]}^\alpha$ bezogene Lie-Ableitung. Dann bestimmt der Operator $X F = v^\alpha \partial F / \partial x^\alpha$ bei kovariantem Vektor v^α eine Raum-Bewegung, wenn die Gleichungen gelten:

$$(*) \quad v_{,\beta}^\alpha = u_{\beta,\gamma}^\alpha, \quad u_{\beta,\gamma}^\alpha = R_{\beta\gamma\sigma}^\alpha v^\sigma, \quad D_\alpha \Omega_{\beta\gamma}^\alpha = 0.$$

Eine Lie-Gruppe von r linear unabhängigen Operatoren $X F$, welche (*) mit den zugehörigen Integrierbarkeitsbedingungen genügen, heißt vollständige Bewegungsgruppe der Ordnung r , wenn sie eine Gruppe maximaler Ordnung für den betrachteten Raum ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer vollständigen Bewegungsgruppe der Ordnung r ist die Existenz einer natürlichen Zahl N , für die die Ränge der ersten N und $N + 1$ Folgen von Integrierbarkeitsbedingungen von (*) bezüglich $v^\alpha, u_{\beta,\gamma}^\alpha$ gleich $n^2 + n - r$ sind. Es wird als Hauptergebnis gezeigt: Die maximale Ordnung vollständiger Bewegungsgruppen in Räumen mit nicht-symmetrischem affinem Zusammenhang ist genau n^2 . — Bei Räumen mit symmetrischem affinem Zusammenhang hatte Verf. früher schon für affin-euklidische Räume $r = n^2 + n$, für alle anderen $r \leq n^2$ gefunden (dies. Zbl. 29, 417). Räume mit symmetrischem affinem Zusammenhang, welche vollständige Bewegungsgruppen der Ordnung n^2 zulassen, sind projektiv-euklidisch. [Siehe hierzu Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 605—608 (1948).]

Süss (Freiburg).

Lewis, D. C.: Metric properties of differential equations. Amer. J. Math. 71, 294—312 (1949).

Verf. behandelt Differentialsysteme der Form $dx_i/dt = X^i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = X^i[x, t]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ihre klassischen Existenztheoreme führen auf Ungleichungen, aus welchen die stetige Abhängigkeit der Systemlösungen von den Anfangswerten hervorgeht, sofern die rechten Seiten der Differentialgleichungen einer Lipschitzbedingung genügen. — Unter gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen für die Funktionen X^i lassen sich diese Untersuchungen über die Abhängigkeit der Systemlösungen verfeinern und ausbauen. Dabei wird dem Raum der Ver-

änderlichen x_1, x_2, \dots, x_n eine allgemeine Finslersche Metrik $\int_0^1 f[x(\tau), x'(\tau)] d\tau$ zugeordnet
 $[f[x, x'] = f(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)]$, deren geodätische Bogen den Eulerschen Gleichungen

$$f_{x_i}[x(\tau), x'(\tau)] - \frac{d}{d\tau} f_{x'_i}[x(\tau), x'(\tau)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

genügen. Bezeichnet dann $D(t)$ die Entfernung zwischen den Integralbogen $C_0: x_i = x_i(t, 0)$ und $C_1: x_i = x_i(t, 1)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, gemessen entlang den geodätischen Bogen g_i , so gilt z. B. unter gewissen Voraussetzungen über dieses geodätische Feld die Abschätzung

$$D(t_0) \exp \int_{t_0}^t \alpha(u) du \leq D(t) \leq D(t_0) \exp \int_{t_0}^t \beta(u) du,$$

wenn

$$\alpha(t) \leq \{f_{x_i}[x, \lambda] X^i[x, t] + f_{x'_i}[x, \lambda] X^i_{x'_j}[x, t] \lambda^j\} \leq \beta(t)$$

(für alle $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ mit $f[x, \lambda] = 1$ in jedem Punkt $[x]$ auf g_i). Der mittlere Term in dieser Ungleichung verwandelt sich in die quadratische Form

$$Q[\lambda] = X_{ij} \lambda^i \lambda^j - \left(\frac{1}{2} X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + g_{ik} X^k_{x_j} \right) \lambda^i \lambda^j \quad (X_{ij} \text{ kovariante Ableitung, } X_i = g_{ik} X^k),$$

wenn die Finslersche Metrik speziell als Riemannsche Metrik gewählt wird. Spezialisiert man weiterhin $\alpha(t) = \tilde{\alpha}$, $\beta(t) = \tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ Konstante, so gelangt man zu klassischen Abschätzungsformeln zurück. — Dieser Satz gibt Anlaß zu zwei weiteren, deren einer insbesondere zeigt, welcher Deformation die Geodätischen der Finslerschen Maßbestimmung unterliegen zufolge der durch das Differentialsystem bestimmten Transformationen. Mit entsprechend erweiterten Voraussetzungen über die Funktionen X^i gewinnt Verf. Abschätzungen für die Ableitungen $D'(t)$ und $D''(t)$ [und ebenso für eine weitere Längenfunktion $L(t)$]. Im Riemannschen Falle führen diese Abschätzungen für $D''(t)$ und $L''(t)$ auf gewisse biquadratische Formen, deren Koeffizienten Y_{ijkl} und Y^*_{ijkl} an die Stelle der kovarianten Ableitungen X_{ij} treten. Weiterhin untersucht Verf. den Fall einer euklidischen Maßbestimmung. Als Anwendungen werden untersucht: das lineare System zweiter Ordnung:

$$dx/dt = A(t)x + B(t)y, \quad dy/dt = C(t)x + D(t)y$$

in Verbindung mit der Metrik $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ und das nichtlineare System

$$dx/dt = -k(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} x, \quad dy/dt = -g - k(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} y.$$

Zum Schluß verwendet Verf. die entwickelte Theorie zum Studium der durch gewöhnliche Differentialsysteme definierten Integralfunktionen, so etwa zur Verallgemeinerung eines für $n=2$ bereits von I. Bendixson aufgestellten Satzes [I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math., Stockholm **24**, 1—88 (1901)]; wenn die Funktionen X^i von t nicht explizit abhängen, ist es unmöglich, eine periodische Lösung zu erhalten in irgendeiner Punktmenge, in welcher der Ausdruck

$$f_{x_i}[x, \lambda] X^i[x, t] + f_{x'_i}[x, \lambda] X^i_{x_j}[x, t] \lambda^j$$

entweder positiv oder negativ definit ist. Auch Beziehungen zu Untersuchungen von Aurel Wintner werden ersichtlich. M. Pinl (Dacca).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Choquet, Gustave: Application des propriétés descriptives de la fonction „contingente“ à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 464—467 (1949).

I. Verf. formuliert einen allgemeinen Satz über das Kontingenz und das Paratingenz und weist auf die zahlreichen Anwendungen hin, insbesondere auf die von ihm gelieferte Verallgemeinerung des Satzes von Baire über den Limes einer Folge stetiger Funktionen; dieser Limes braucht jetzt nicht mehr als eindeutige Funktion vorausgesetzt zu werden (vgl. G. Choquet, dies. Zbl. **31**, 281). — II. Ist E ein topologischer Raum und sind $F(m)$ und $\alpha(m)$ zwei in E definierte, stetige Funktionen mit reellen Werten, so definiert man als Ableitung von F bezüglich α die Funktion $g(m) = \lim (F(m') - F(m)) / (\alpha(m') - \alpha(m))$, falls dieser Limes existiert. Verf. teilt mit, daß er das Problem von Fréchet gelöst hat, zu gegebenem $g(m)$ und $\alpha(m)$ die Primitive $F(m)$ zu bestimmen und ihre Eindeutigkeit nachzuweisen. — III. Weiter berichtet er, daß er das Problem von Fréchet gelöst hat, diejenigen Bogen zu kenn-

zeichnen, die einer differenzierbaren Parametrisierung fähig sind (und Entsprechendes für Mannigfaltigkeiten). — IV. Schließlich wird mitgeteilt, daß Verf. eine Kennzeichnung der Familie der Derivierten gegeben hat. (Résumé der These des Verf. Keine ausführlichen Formulierungen und keine Beweise.) — Ref. benutzt die Gelegenheit, darauf hinzuweisen, daß es in dem unter I angeführten Referat in Zeile 19 von unten $X \times Y$ statt XY und in Zeile 15 von unten „gleich der von m'' statt „gleich m'' “ heißen muß. *Nöbeling* (Erlangen).

Haupt, Otto und Christian Pauc: Zum Beweise des Verteilungssatzes für Punkte mit unvollständigem Kontingent. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1947, 51—55 (1949).

Neuer Beweis des folgenden Satzes von F. Roger [Acta math., Uppsala 69, 99 (1937); dies. Zbl. 18, 250]: Ist \mathfrak{M} eine beliebige Punktmenge im Euklidischen E_n , wobei $2 < n$, und bezeichnet \mathfrak{M}_u die Menge aller Punkte $P \in \mathfrak{M}$, in welchen das Kontingent $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ von \mathfrak{M} unvollständig ist (d. h. nicht mit dem ganzen E_n zusammenfällt), so gilt: (a) Es ist \mathfrak{M}_u enthalten in einer Summe \mathfrak{S} von abzählbar vielen $(n-1)$ -dimensionalen, dehnungsbeschränkten Flächenstücken und (b) für L_{n-1} -fast alle $P \in \mathfrak{M}_u$ ist $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ entweder ein abgeschlossener Halbraum oder eine Hyperebene im E_n ; die Redeweise „ L_{n-1} -fast alle“ bedeutet dabei: Für alle $P \in (\mathfrak{M}_u - \mathfrak{N})$, wobei $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$ eine Menge vom $(n-1)$ -dimensionalen Maße Null bezeichnet. *Nöbeling*.

Haupt, Otto: Über einige affin-geometrische Ovalsätze in der direkten Infinitesimalgeometrie. Math. Z. 51, 635—657 (1949).

Dans un article précédent [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 15, 130—164 (1943); ce Zbl. 28, 91] l'A. a fourni une version topologique des théorèmes sur les ovales analogues au théorème de Böhmer, exprimant le passage d'une propriété locale d'une courbe B à une propriété globale. Dans la présente note, il adopte le point de vue infinitésimal ou ponctuel utilisant la notion de paratingente définie au moyen de caractéristiques d'ordre A . Comme exemple de transposition infinitésimale d'une définition locale, nous citons la suivante: Une paratingente de B en p est dite normale si elle est la limite d'une suite A_n telle que pour chaque n il existe un voisinage U_n de p dans lequel les points de $A_n \cdot B$ se présentent dans le même ordre sur A_n et sur B . Des conditions portant sur les paratingentes sont données afin que B soit en p courbe de type $(\geq f)$, f -normale, s -normale, L_f -convexe ou L_f -concave (Déf. dans loc. cit. pp. 158, 153). La théorie générale est illustrée sur le cas d'un arc plan différentiable continuellement jusqu'au troisième ordre, les caractéristiques d'ordre étant les coniques d'excentricité fixée. *Chr. Pauc* (Le Cap).

Denk, Franz und Otto Haupt: Über die Windungsmonotonie der Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$. J. reine angew. Math. 187, 95—108 (1949).

Ein Bogen n -ter Ordnung ohne Hyperebene Teilbogen im affinen n -dimensionalen Raum wird als ein Elementarbogen \mathfrak{B} bezeichnet. Seine Windungseigenschaft ist dadurch gekennzeichnet, daß das orientierte Simplex, gebildet aus beliebigen $n+1$ in natürlicher Reihenfolge auf dem orientierten Bogen \mathfrak{B} angeordneten Punkten, stets positives (oder stets negatives) Volumen besitzt. Eine anders geartete, ebenfalls anschauliche Windungseigenschaft von \mathfrak{B} läßt sich für hinreichend kurze Elementarbogen in der Form aussprechen: Sind c_v ($v = 1, 2, \dots, n$) die mit Vorzeichen versehenen Abschnitte, welche von irgendeiner durch n (vom Anfangspunkt O von \mathfrak{B} verschiedene) Punkte P_1, P_2, \dots, P_n von \mathfrak{B} gehenden Hyperebene auf den (orientierten) Achsen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ eines vorderen Schmiegekoordinatensystems an \mathfrak{B} in O ausgeschnitten werden, so sind die Quotienten $s = c_{v+1} : c_v$ negativ und c_1, c_2, \dots, c_n sowie s_1, s_2, \dots, s_{n-1} gehen monoton gegen Null, wenn die Punkte P_1, \dots, P_n gegen O konvergieren. Diese Eigenschaft wird als Windungsmonotonie von \mathfrak{B} (bezüglich O) bezeichnet. Das vordere Schmiegekoordinatensystem sowie Tangentialräume und Tangentialhalbräume (in O) wurden in einer früheren Arbeit der Verff. [J. reine angew. Math. 183, 69—91 (1941); dies. Zbl. 24, 283] definiert. — Sind

Q_1, Q_2, \dots, Q_r ($0 \leq r \leq n+1$) beliebige verschiedene Punkte eines Bogens im projektiven n -dimensionalen Raum, so sind sie stets linear unabhängig dann und nur dann, wenn der Bogen ein Elementarbogen ist. Sind diese Punkte von den Endpunkten von \mathfrak{B} verschieden, so wird der von ihnen eindeutig bestimmte lineare $(q-1)$ -dimensionale Raum (q) als eine r -Sekante von \mathfrak{B} im engeren Sinne (i. e. S.) bezeichnet. Kommen auch Endpunkte von \mathfrak{B} unter den Punkten Q_k vor, so ist (q) eine extreme r -Sekante. r -Sekanten i. e. S. und extreme r -Sekanten von \mathfrak{B} werden als r -Sekanten im weiteren Sinne (i. w. S.) bezeichnet. Die n -Sekanten i. w. S. heißen Maximalsekanten von \mathfrak{B} , sie sind Hyperebenen. Der Durchschnitt einer Maximalsekante mit dem $(j+1)$ -dimensionalen Tangentialschmieghalbraum an \mathfrak{B} im Anfangspunkt O wird als die j -dimensionale Halbspur der Maximalsekante von \mathfrak{B} in O bezeichnet. — Aus der Windungsmonotonie folgt der Halbspurensatz: Die j -dimensionale Halbspur der Maximalsekante $(q) = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ konvergiert gegen den j -dimensionalen Tangentialschmieghalbraum an \mathfrak{B} in O monoton, wenn (q) gegen O monoton konvergiert. Gyula Sz.-Nagy (Szeged).

Fejes Toth, L. und H. Hadwiger: Über Mittelwerte in einem Bereichssystem. Bull. Ecole Polytechn. Jassy 3, 29—35 (1948).

In der Ebene sei ein System $\{G_v\}$ von einfach zusammenhängenden Bereichen G_v gleichmäßig beschränkter Durchmesser gegeben. Es mögen die Grenzwerte

$$D_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{\pi R^2}, \quad F = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum^R F}{N(R)}, \quad L = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum^R L}{N(R)}$$

existieren, wobei $N(R)$ die Anzahl der Bereiche des Systems ist, die ganz im Kreise vom Radius R um den Ursprung der Ebene liegen und wo \sum^R eine Summation bedeutet, die sich über die bei der Bestimmung von $N(R)$ mitgezählten Bereiche erstreckt. — Bewegt sich der einfach zusammenhängende Bereich G vom Flächeninhalt F und der Randlänge L in der Ebene und ist in jeder Lage S die Summe der Anzahlen der Komponenten der Durchschnitte von G mit sämtlichen G_v , so existiert der integralgeometrische Mittelwert \bar{S} von S über alle Lagen von G und es ist $\bar{S} = D_0(F + \bar{F} + LL/2\pi)$. G. Bol (Freiburg i. Br.).

Angewandte Geometrie:

Boaga, Giovanni: Sulla rappresentazione di Weingarten della sfera sul piano. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 402—407 (1949).

Ausgehend von den bekannten Potenzreihen von Weingarten, die die kartesischen Koordinaten ξ, η, ζ einer geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid in Funktion der geodätischen Polarkoordinaten s und α angeben, gelangt Verf. durch Spezialisierung für eine Kugel vom Radius $R = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$ zu den Formeln $\xi = R \sin(s/R) \cos \alpha$ und $\eta = R \sin(s/R) \sin \alpha$, die — abgesehen von einem Glied mit $e'^2 \cos^2 \varphi$ — mit den für das Rotationsellipsoid gültigen Formeln bis zu den 3. Potenzen von s/R übereinstimmen. Die durch ξ und η vermittelte Abbildung der Kugel auf die im Ursprung der geodätischen Polarkoordinaten berührende Ebene (in der Kartenprojektionslehre als orthographische Abbildung bekannt) wird vom Verf. als Abbildung nach Weingarten bezeichnet und hinsichtlich ihrer Verzerrungseigenschaften untersucht. Bei der vorgesehenen Beschränkung auf eine maximale Entfernung von 110 km vom Ursprung erreicht die maximale Längenverzerrung den Wert 0,0001 und die maximale Richtungsverzerrung einen Betrag von 15'', was für kartographische Zwecke belanglos ist. — Schließlich werden allgemeine Gleichungen für die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene abgeleitet, bei denen ebenfalls von geodätischen Polarkoordinaten auf der Kugel ausgegangen wird. Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich nach Ansicht des Verf. bei der Her-

stellung von Seekarten, falls geodätische Polarkoordinaten durch Radar und Funkpeilung direkt gemessen werden. — Druckfehler: Auf S. 405 muß es in Formel (17) und (18) $N_1 + N_2 \tan^2 \alpha$ bzw. $\cos(s/R) + \tan^2(\alpha)$ [tang $^2 \alpha$ statt tang α in beiden Ausdrücken] heißen, und in Formel (19): $\tan \vartheta_{\max} = \pm \sin^2 \frac{s}{2R} \sqrt{\sec(s/R)}$ ($s/2R$ statt s/R vor der Wurzel). W. Hofmann (Bonn).

Beafoy, Leroy A. and A. F. S. Diwan: Analysis of continuous structures by the stiffness factors method. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 263—282 (1949).

Verf. entwickeln für ebene, mehrfach statisch unbestimmte Baukonstruktionen ein streng gültiges Verfahren zur Ermittlung der Spannungen und Formänderungen, das den Vorzug besitzt, nicht auf Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten zu führen, und das zu seiner Lösung keine schrittweisen Näherungen heranziehen muß und praktisch stets mit dem Rechenschieber allein lösbar ist. — Die Methode der Steifigkeitsfaktoren, wie sie die Verf. nennen, wurde von G. E. Beggs [Proc. Amer. Concrete Inst. 18, 58 (1922)] an unbelasteten Modellen rein experimentell entwickelt und hat in der vorliegenden Arbeit ihr analytisches Analogon gefunden. Unter „Steifigkeitsfaktoren“ verstehen die Verf. dabei die an dem Ende eines Gliedes oder an einem Gelenke angreifende Horizontal- oder Vertikalkraft bzw. das statische Moment, welche Größen notwendig sind, um dort die Verschiebung „1“ hervorzurufen. Die Kenntnis dieser Größen gestattet dann leicht, die der wirklichen Belastung entsprechende Beanspruchung zu ermitteln. Das Verfahren, das zur zahlenmäßigen Lösung in drei Schritten gelangt, ist dadurch ausgezeichnet, daß im ersten Schritte alle Operationen zusammengefaßt sind (sog. elastische Konstanten, Steifigkeitsfaktoren und „induzierte“ Verschiebungen), die nur durch die geometrische und mechanische Konfiguration des unbelasteten Systems bedingt sind und somit jeder Belastungsart als Grundlage dienen. Die beiden anderen Schritte dienen dann der Bestimmung der Spannungen und Formänderungen infolge der gegebenen Belastung. Die dazu nötigen Gleichungen, die in vielen praktischen Fällen (z. B. bei Nichtbeachtung der Längsdeformationen) leicht weiter vereinfacht werden können, sind in übersichtlicher Weise zusammengestellt. — An Hand eines Beispiels, das sich auf 3 Halbellipsen ähnliche Bogen konstanten Querschnitts bezieht, die auf 4 ebensolchen Säulen ruhen und von denen nur der erste Bogen durch eine Rechteckslast beansprucht ist, zeigen Verf. die praktische Durchführung des Verfahrens. Die Zwischenergebnisse werden dabei vorteilhaft in Tabellen zusammengefaßt, die den einzelnen Schritten entsprechen. Die erhaltenen Zahlenergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den anderweitig [L. C. Maugh, Wiley (1946)] gewonnenen Ergebnissen. — Das Verfahren, das auch anders gekrümmte Glieder mit veränderlichem Querschnitt bequem zu berücksichtigen gestattet, ist sonst wohl kaum angewendet worden, dürfte sich aber seiner Vorzüge wegen bewähren und bietet die erwünschte Möglichkeit einer unabhängigen Kontrolle dar.

Karas (Darmstadt).

Arutjunjan, N. Ch.: Zur Untersuchung statisch unbestimmter Systeme mit Stützen, die sich mit der Zeit verschieben. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 489—500 (1949) [Russisch].

L'A. envisage un système hyperstatique, plan, formé de barres rigides, prenant appui en n points B_i sur une couche (d'épaisseur uniforme et d'étendue très grande) d'un sol poreux, compressible, imbibé d'eau, reposant sur un sol incompressible et imperméable à l'eau. Une charge donnée est appliquée au système à partir de l'époque $t = 0$: l'A. cherche à déterminer les résultantes et les moments résultants des réactions du sol en chaque B_i en tant que fonctions du temps (c'est à dire, en tenant compte des déplacements que subissent les appuis B_i). La question est ramenée à un système d'équations intégrales linéaires que l'A. parvient à résoudre.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Topologie:

Murty, A. S. N.: Simply ordered spaces. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 152—158 (1949).

Es sei S eine einfach geordnete Menge (also $a < b$ oder $b > a$ oder $a = b$; aus $a < b$, $b < c$ folgt $a < c$). Ein Intervall ist jede Menge, die besteht aus allen $x < a$ oder allen $x > b$ oder allen x mit $a < x < b$ (a und b jeweils fest, aber beliebig). Offen heißt jede Menge, die die Vereinigung von Intervallen ist. Bezüglich dieser Topologie ist S normal. S ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn bei jeder Dedekindschen Zerlegung die Unterklasse ein größtes oder die Oberklasse ein

kleinstes Element enthält (aber nicht beides gleichzeitig). Ist S zusammenhängend, so ist S dann und nur dann bikompakt, wenn S ein kleinstes und ein größtes Element enthält.

Nöbeling (Erlangen).

Balanzat, Manuel: Über die α -regulären D -Räume. Rev. Un. mat. Argentina 14, 90—98 (1949) [Spanisch].

Nach Fréchet heißt eine Menge R ein Raum mit „écart“ (E -Raum), wenn daneben eine mehrelementige geordnete Menge S mit einem ersten Element 0 gegeben ist, und dazu eine Abbildung der Punktpaare x, y von R in S , $\sigma = (x, y)$, so daß $(x, y) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = y$. [Symmetrie von (x, y) wird nicht gefordert.] Als „Umgebungen“ von a fungieren die Mengen $[(\hat{x}, a) \leq \sigma]$, $\sigma > 0$. Der E -Raum heißt α -regulär, wenn eine Abbildung $\sigma' = \Phi(\sigma)$ von S in sich existiert mit $\Phi(\sigma) \rightarrow 0$ für $\sigma \rightarrow 0$ und der Eigenschaft: (α) Aus $(x, y) \leq \sigma$ und $(y, z) \leq \sigma$ folgt $(x, z) \leq \Phi(\sigma)$. — Kommutiert man x, y bzw. y, z in einer oder beiden Voraussetzungen von (α), so erhält man 3 andere Aussagen. Jede dieser drei Aussagen hat jede andere und auch (α) zur Folge und charakterisiert den Fall der Regularität schlechthin [M. Fréchet, De l'écart numérique à l'écart abstrait, Portugaliae Math. 5, 121—131 (1946)]. Verf. konstruiert dazu folgende Beispiele: 1. einen α -regulären E -Raum, der zu keinem regulären E -Raum äquivalent ist; 2. einen α -regulären, nicht metrisierbaren E -Raum mit numerischem écart, dessen kompakte Teilmengen nicht notwendig endlich sind; 3. einen α -regulären, nicht metrisierbaren E -Raum mit numerischem écart, dessen separable Teilmengen nicht notwendig abzählbar sind.

Aumann (Würzburg).

•Čech, Eduard and Josef Novák: On regular and combinatorial imbedding. Časopis Mat. Fysiky, Praha 72, 7—16 und tschechische Zusammenfassg. 16 (1947).

H. Wallmann hat für einen beliebigen topologischen Raum Q einen bikompakten Raum ωQ konstruiert, der Q als dichte Teilmenge enthält [Ann. Math., Princeton, II. S. 39, 112—127 (1938); dies. Zbl. 18, 332]. Verff. zeigen, daß ωQ bis auf eine Q identisch auf sich abbildende Homöomorphie gekennzeichnet ist durch die Eigenschaft, daß Q regulär und kombinatorisch in ωQ eingebettet ist. Dabei heißt Q regulär eingebettet in P , wenn die Familie (F) der in P abgeschlossenen Hüllen \bar{F} aller (in Q) abgeschlossenen Mengen F aus Q eine „abgeschlossene Basis“ von P bilden, d. h. jede in P abgeschlossene Menge aus P ist der Durchschnitt von Mengen der Familie (F) ; Q heißt kombinatorisch eingebettet in P , wenn für je endlich viele in Q abgeschlossene Mengen F_1, \dots, F_n aus Q mit $\cap F_i = 0$ gilt $\cap \bar{F}_i = 0$. Nöbeling (Erlangen).

Stone, A. H.: Incidence relations in unicoherent spaces. Trans. Amer. math. Soc. 65, 427—447 (1949).

Es handelt sich um eine „Inzidenz-Geometrie“ eines Raumes, d. h. um Relationen zwischen den Komponentenanzahlen von Mengen, ihren Begrenzungen, Vereinigungen und Durchschnitten. — Es liege ein nicht leerer, zusammenhängender, lokal zusammenhängender, topologischer Raum S vor (Trennungsaxiome brauchen nicht erfüllt zu sein). S sei außerdem unikohärent, d. h. (S sei zusammenhängend und) für je zwei abgeschlossene, zusammenhängende Mengen A und B mit $A \cup B = S$ ist $A \cap B$ zusammenhängend. Verf. zeigt, daß man, wenn man in dieser Definition „offene“ statt „abgeschlossene“ sagt, eine äquivalente Definition erhält. Weiter werden bewiesen: I. Kennzeichnungen der Unikohärenz; II. Sind A und B zwei Mengen, deren abgeschlossene Hüllen \bar{A} und \bar{B} zusammenhängend sind, so gilt $b_0(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq b_0(A^* \cap B^*)$ [dabei ist X^* die Begrenzung von X und $b_0(X) = (\text{Anzahl der Komponenten von } X) - 1$]; III. Sind A und B zwei beliebige Mengen mit $A^* \cap B^* = 0$ oder sind A und B zwei abgeschlossene Mengen mit $A^* \cap B^* \cap (A \cup B)^* = 0$, so ist $b_0(A \cap B) + b_0(A \cup B) = b_0(A) + b_0(B)$; IV. Sind A_1, A_2, \dots, A_n n zusammenhängende Mengen ($n \geq 3$) derart, daß je

$n-1$ von ihnen, aber nicht alle einen Punkt gemein haben, so existieren mindestens $2n-3$ Paare i, j von Zahlen mit $1 \leq i < j \leq n$ derart, daß $A_i^* \cap A_j^* \neq \emptyset$.

Nöbeling (Erlangen).

Stone, A. H.: Incidence relations in multicoherent spaces. I. Trans. Amer. math. Soc. 66, 389—406 (1949).

Vgl. hierzu das vorstehende Referat. Die Voraussetzung der Unikohärenz wird jetzt fallen gelassen. Dafür wird S als vollständig normal vorausgesetzt. Der Grad $r(S)$ der Multikohärenz von S ist $= \sup b_0(A \cap B)$, wobei sich das Supremum bezieht auf alle Paare A, B abgeschlossener, zusammenhängender Mengen mit $A \cup B = S$. Die unter I bewiesenen Kennzeichnungen der Unikohärenz [$r(S) = 0$], in natürlicher Weise verallgemeinert, sind i. a. nicht kennzeichnend für $r(S) \leq n$; sie sind es jedoch, wenn S keine lokalen Zerschneidungspunkte (local cut points) enthält. Der Satz von Phragmén-Brouwer wird folgendermaßen verallgemeinert: Ist A eine beliebige Menge aus S mit zusammenhängender abgeschlossener Hülle \bar{A} und sind C_i die Komponenten von $S - A$, so ist $\sum b_0(C_i^*) \leq r(S)$; gilt umgekehrt, bei festem n , die Ungleichung $\sum b_0(C_i^*) \leq n$ für die Komponenten C_i von $S - A$ einer beliebigen offenen, zusammenhängenden Menge A mit $b_0(S - A) < \infty$, so ist $r(S) \leq n$ (bei dieser Umkehrung kann man statt „offenen“ auch „abgeschlossenen“ sagen). Aus dem Fragenkreis der Sätze II und III wird u. a. folgendes bewiesen: Sind \bar{A} und \bar{B} zusammenhängend und ist $A^* \cap B^* \neq \emptyset$, so ist $b_0(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq b_0(A^* \cap B^*) + r(S)$. Sind A und B abgeschlossen und zusammenhängend und ist $A^* \cap B^* \cap (A \cup B)^* = \emptyset$, so ist $b_0(A \cap B) \leq r(S)$. Sind A und B zusammenhängend und gilt $A^* \cap B^* \cap (A \cap B)^* = \emptyset$, so ist $b_0(A \cap B) \leq r(S)$; ist weiter $b_0(A \cap B) = r(S) < \infty$, so ist $A^* \cap B^* = \emptyset$.

Nöbeling (Erlangen).

Denjoy, Arnaud: La multiconnexité des ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 693—695 (1950).

Denjoy, Arnaud: Les espaces biconnexes. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 797—800 (1950).

Es sei M ein metrischer Raum. Ein System $D_0 = (A, B)$ zweier Punkte A und B heiße eine Dublette der Ordnung 0. Eine Menge $E \subseteq M$ heiße unikonnex (oder 1-konnex) bezüglich D_0 , wenn eine abgeschlossene (kompakte) Teilmenge F von E existiert, die zwischen A und B zusammenhängend ist [d. h.: für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Punkte $M_0 = A, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ in F derart, daß der Abstand $\delta(M_i, M_{i'}) < \varepsilon$ ist für $|i - i'| = 1$]. Eine Dublette D_1 der Ordnung 1 ist ein Paar (Γ_1, Γ_2) zweier verschiedener, abgeschlossener Mengen, welche unikonnex sind bezüglich derselben Punkte A und B . Eine abgeschlossene Menge $F \subseteq M$ heiße bikonnex (oder 2-konnex) bezüglich der Dublette $D_1 = (\Gamma_1, \Gamma_2)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ in F Punkte M_{ij} ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$) existieren derart, daß $M_{0j} = A$ und $M_{mj} = B$ für jedes j , $M_{i0} \in \Gamma_1$ und $M_{in} \in \Gamma_2$ für jedes i und $\delta(M_{ij}, M_{i'j'}) < \varepsilon$ für $|i - i'| + |j - j'| = 1$ ist. Analog definiert man die Tri-konnexität, usw., allgemein für jedes natürliche k die k -Konnexität bezüglich einer Dublette D_{k-1} der Ordnung $k-1$. Eine in M offene oder abgeschlossene Menge E heiße k -konnex, wenn jede in E enthaltene Dublette D_{k-1} der Ordnung $k-1$ enthalten ist in einer abgeschlossenen Menge $F \subseteq E$, die k -konnex ist bezüglich D_{k-1} . — Der cartesische Raum beliebiger Dimension ist k -konnex bezüglich jedes natürlichen k . — Ist der metrische Raum M kompakt und separabel und ist die abgeschlossene Menge F k -konnex bezüglich der Dublette D_{k-1} der Ordnung $k-1$, so enthält F eine abgeschlossene, bezüglich D_{k-1} irreduzibel k -konnexe Teilmenge. — Der metrische Raum M sei kompakt und bikonnex; es seien H_1 und H_2 zwei fremde, offene, unikonnexe Mengen aus M ; ihre Begrenzungen H_1^* und H_2^* mögen zwei Punkte A und B gemein haben; dann sind H_1^* und H_2^* unikonnex bezüglich $D_0 = (A, B)$ — (Die ausgesprochenen Sätze werden bewiesen.)

Nöbeling (Erlangen).

Mickle, Earl J.: An extremal property of monotone-light factorizations. *Duke math. J.* **16**, 179—187 (1949).

Es sei U die positiv orientierte Einheitssphäre $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ eines Euklidischen uvw -Raumes und T eine eindeutige, stetige Abbildung von U in einen Euklidischen xyz -Raum E_3 . Es sei $V(T) = \int |i(x, y, z; T)| dx dy dz$, wenn die Indexfunktion $i(x, y, z; T)$ von T (vgl. P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935; dies. Zbl. **13**, 79) summierbar ist, sonst $V(T) = +\infty$, also $V(T)$ das von $T(U)$ umschlossene Volumen. Weiter sei $A(T)$ der Lebesguesche Flächeninhalt von $T(U)$. Dann gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$V(T)^2 \leq A(T)^3/36\pi$$

[T. Radó, *Trans. Amer. math. Soc.* **61**, 530—555 (1947)]. Nun sei T dargestellt als Produkt $T = sf$ zweier eindeutiger, stetiger Abbildungen f und s , wobei f eine Abbildung von U auf einen Peano-Raum \mathfrak{M} (lokal zusammenhängendes Kontinuum) und s eine Abbildung von \mathfrak{M} in E_3 ist. \mathfrak{M} ist die Vereinigung zyklischer Elemente. Ist C ein eigentliches zyklisches Element von \mathfrak{M} , so existiert (genau) eine eindeutige, stetige Abbildung r_C von \mathfrak{M} auf C , bei welcher $r_C(p) = p$ und $r_C^{-1}(p)$ ein Kontinuum ist für jeden Punkt p von C . Es sei T_C die Abbildung $sr_C f$ von U auf eine Teilmenge von $T(U)$. Wird $\Sigma V(T_C) = V^*(f, s)$ gesetzt, wobei summiert wird über alle eigentlichen zyklischen Elemente C von \mathfrak{M} , so ist $V(T) \leq V^*(f, s)$. Nach einer demnächst erscheinenden Arbeit von J. W. T. Youngs gilt die verschärfte isoperimetrische Ungleichung $V^*(f_0, s_0)^2 \leq A(T)^3/36\pi$, wobei $T = s_0 f_0$ die (für jedes T existierende, eindeutig bestimmte) monoton-lichte Faktorisierung ist: f_0 ist monoton [d. h. das f_0 -Urbild jedes Punktes von $f_0(U)$ ist ein Kontinuum] und s_0 ist licht [d. h. das s_0 -Urbild jedes Punktes von $T(U)$ ist total zusammenhanglos]. Verf. zeigt nun: $V^*(f_0, s_0) = \sup V^*(f, s)$, wobei sich das Supremum auf alle Faktorisierungen $T = sf$ von T bezieht. Es gilt also $V^*(f, s)^2 \leq A(T)^3/36\pi$ für jede Faktorisierung $T = sf$ von T . Nöbeling (Erlangen).

Youngs, J. W. T.: Remarks on cyclic additivity. *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 427—432 (1949).

Es seien X und Z zwei topologische Räume und G eine kommutative, topologische Halbgruppe (mit 0-Element), die als Raum Hausdorffsch ist. Eine (eindeutige, stetige) Abbildung f von X in Z heiße Peano-faktorisiert, wenn ein lokal-zusammenhängendes Kontinuum Y , eine Abbildung h von X in Y und eine Abbildung g von Y in Z mit $f = gh$ existieren. Ist E ein wahres zyklisches Element von Y , so existiert genau eine monotone Retraktion r_E von Y auf E (= Abbildung, bei welcher $r_E(y) = y$ und $r_E^{-1}(y)$ ein Kontinuum ist für jedes $y \in E$); es werde $gr_E h = f_E$ gesetzt. Schließlich sei F die Klasse aller Abbildungen f von X in Z mit mindestens einer Peano-Faktorisierung und γ eine Transformation von F in G . Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß γ zyklisch additiv ist, d. h. daß die Gleichung $\gamma(f) = \Sigma \gamma(f_E)$ für jedes $f \in F$ gilt, wobei summiert wird über alle wahren zyklischen Elemente E von Y [diese Gleichung bedeutet: ist U eine Umgebung von $\gamma(f)$, so existieren endlich viele E_1, \dots, E_n derart, daß für je endlich viele E_{n+1}, \dots, E_m gilt $\gamma(f_{E_1}) + \dots + \gamma(f_{E_m}) \in U$]. Nöbeling (Erlangen).

Leray, Jean: Détermination, dans les cas non exceptionnels, de l'anneau de cohomologie de l'espace homogène quotient d'un groupe de Lie compact par un sous-groupe de même rang. *C. r. Acad. Sci., Paris* **228**, 1902—1904 (1949).

Soient: X groupe de Lie compact connexe, Y sous-groupe fermé connexe, T tore maximal de Y , $H(W)$ l'anneau de cohomologie de l'espace W (à coefficients réels ce qui est sous-entendu dans la suite), $P(W, t)$ le polynôme de Poincaré correspondant. Dans cette Note, X et Y ont même rang. Soient

$$P(X, t) = \prod_{i=1}^l (1 + t^{2m_i-1}), \quad P(Y, t) = \prod_{i=1}^l (1 + t^{2n_i-1});$$

l'A. annonce que la conjecture de G. Hirsch:

$$(1) \quad P(X/Y, t) = \prod_1^l (1 - t^{2m_i}) / \prod_1^l (1 - t^{2n_i})$$

est vraie si X est localement un produit direct de groupes classiques. Il obtient (1) d'abord dans le cas $Y = T$, ajoutant qu'alors $H(X/T)$ est engendré par ses éléments de degré 2. Il en déduit que Y/T est totalement non homologue à zéro dans X/T , espace fibré par Y/T , de base X/Y , donc que $P(X/T, t) = P(X/Y, t) \cdot P(Y, t)$, [J. Leray, C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 395—397 (1946)], d'où (1). L'A. étudie aussi le cas où Y est non connexe et les relations de $H(X/Y)$ avec le groupe fini $\Phi(Y)$, quotient par T du normalisateur de T dans Y [Remarque du rapp.: Pour lever la restriction: X produit de groupes classiques, il suffit d'après l'A. de savoir que l'anneau des polynômes à l variables invariants par $\Phi(X)$, envisagé comme groupe de transformations linéaires de l'algèbre de Lie de T , est engendré par l éléments de degrés m_1, \dots, m_l ; ce fait, vérifié par l'A. pour les groupes classiques, résulte de Théorèmes de H. Cartan et C. Chevalley non encore publiés]. A. Borel.

Leray, Jean: Sur l'anneau de cohomologie des espaces homogènes. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 281—283 (1949).

Mêmes notations que ci-dessus, sauf que X est un espace compact simplement connexe admettant Y (éventuellement non connexe) comme groupe de transformations qui, sauf l'identité, n'ont pas de points fixes. Théorème: A la projection de X/T , fibré par Y/T , sur sa base X/Y correspond un isomorphisme de $H(X/Y)$ sur l'ensemble des éléments de $H(X/T)$ invariants par $\Phi(Y)$. Corollaire: Si Y est connexe et Z un sous-groupe de rang maximum de Z alors $P(X/Z) = P(Y/Z) \cdot P(X/Y)$; ces résultats sont formulés sous l'hypothèse Y, Z non exceptionnels qui peut être levée comme dans la Note précédente. L'A. donne ensuite des indications sur $H(X/T)$ lorsque X est un groupe simple non exceptionnel de rang l , T un tore de dimension $(l-1)$ contenu dans plusieurs tores maximaux de X . Il énonce enfin des relations entre les algèbres de cohomologie d'un espace fibré et de sa base quand la fibre est une sphère d'homologie, relations qui complètent la théorie de W. Gysin [Comment. math. Helvetici **14**, 61—122 (1941); ce Zbl. **26**, 270]. A. Borel.

Eckmann, Beno: Coverings and Betti numbers. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 95—101 (1949).

Sei \bar{P} ein endliches Polyeder, P eine endlichblättrige reguläre Überlagerung von \bar{P} mit der Decktransformationengruppe G der Ordnung g . Die Elemente von G induzieren lineare Abbildungen der n -ten Homologiegruppe H_n von P (Koeffizientenbereich reelle Zahlen). Ist $s(x)$ der Charakter der Abbildung x , so gilt für die n -te Bettische Zahl \bar{p}_n von P : $\bar{p}_n = \frac{1}{g} \sum_{x \in G} s(x)$. Zum Beweis wird gezeigt,

daß die n -te Homologiegruppe von P isomorph ist der Untergruppe H_n^i derjenigen Homologieklassen von H_n , die bei allen Abbildungen $x \in G$ auf sich abgebildet werden; die Formel folgt dann aus einem Satz der Darstellungstheorie. Als Anwendung wird unter anderem bewiesen: Die ersten Bettischen Zahlen \bar{p}_1, p_1 einer dreidimensionalen nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit und ihrer zweiblättrigen orientierbaren Überlagerung sind verknüpft durch $p_1 = 2\bar{p}_1 - 1$ [vgl. T. H. Kiang, An application of the addition formulas of Mayer-Vietoris, Acad. Sinica Sci. record **7**, 275—276 (1945)].

Specker (Zürich).

Harrold jr., O. G.: Euclidean domains with uniformly Abelian local fundamental groups. Trans. Amer. math. Soc. **67**, 120—129 (1949).

Sei C eine Teilmenge der n -Sphäre S^n . Unter welchen Bedingungen ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^n - C) = 0$? Auf diese Frage gibt Verf. folgende spezielle Antworten: 1. wenn C eine topologische i -Zelle ($i = 1, \dots, n$) ist und $S^n - C$ gleichmäßig abelsche lokale Fundamentalgruppen (un. a. l. g.) hat; 2. wenn C

kompakt und total diskontinuierlich ist und $S^n - C$ un. a. l. g. hat. — Die offene Menge A des topologischen Raumes X hat dabei un. a. l. g., falls es für jeden Punkt $p \in X$ und jede Umgebung U von p in X eine Umgebung V von p in X gibt, so daß $V \cap A \subset U \cap A$ und jeder geschlossene Weg in $V \cap A$, der in $U \cap A$ zum Kommutator zweier Wege von $U \cap A$ homotop ist, in $U \cap A$ nullhomotop ist. Zum Beweise werden Beziehungen des Begriffes „un. a. l. g.“ zu den Begriffen „gleichmäßig lokal-zusammenhängend im Homologie- bzw. Homotopiesinn“ [vgl. hierzu Eilenberg and Wilder, Amer. J. Math. 64, 613—622 (1942)] hergeleitet und u. a. Sätze der zitierten Arbeit benutzt. *Burger* (Frankfurt a. M.).

Ghezzi, S.: *Intorno ad un teorema sulle quasi-traiettorie di una traslazione piana generalizzata.* Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 177—180 (1949).

Verallgemeinerung eines Theorems von Scorza Dragoni (erscheint in Annali Triestini) bezüglich Quasi-Translationsbögen. *Féry* (Paris).

Bernhart, Arthur: *Another reducible edge configuration.* Amer. J. Math. 70, 144—146 (1948).

Eine Gebietseinteilung ist für das Vierfarbenproblem reduzibel, wenn sie einen 4-Ring enthält, der aus zwei Sechsecken besteht mit gemeinsamer Kante, an deren Endpunkte je ein Fünfeck stößt. *Künnetth* (Erlangen).

Klassische theoretische Physik.

● **Weizel, Walter:** *Lehrbuch der theoretischen Physik. I: Physik der Vorgänge. Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme.* Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. Mit 270 Textabb., XIV, 771 S., DM 53.—, geb. DM 56,90.

Der vorliegende 1. Band eines neuen zweibändigen Lehrbuches der theoretischen Physik ist „Physik der Vorgänge“ überschrieben und behandelt die vorquantenmechanische klassische Physik. Der 1. Abschnitt (140 Seiten) behandelt die Mechanik der Punkte und starren Körper in dem bei gleichartigen Lehrbüchern üblichen Umfang. Etwas knapp ist die Behandlung der Prinzipien der Dynamik ausgefallen; dafür ist ausführlich dargestellt, was zum Verständnis der Überleitung zur Quantenmechanik notwendig ist (Hamilton-Jacobische Theorie, periodische und bedingtperiodische Bewegungen). Gelegentlich sind, wohl um eine größere Flüssigkeit des Textes zu erreichen, die Voraussetzungen einer Ableitung und ihre Ergebnisse nicht noch einmal in einem Satz zusammengefaßt (z. B. Drehimpulssatz). Das ist möglich, macht aber das Lehrbuch mehr für ein älteres als für ein jüngeres Semester geeignet. Sehr ausführlich und klar (170 Seiten) ist der Abschnitt über die Kontinuumsmechanik. Der elektrodynamische Abschnitt (180 Seiten), in dem konsequent praktische Einheiten verwendet werden, zeichnet sich in glücklicher Weise durch ein sonst nur in elektrotechnischen Lehrbüchern auftretendes Kapitel über die Vierpoltheorie der Schaltungen aus. Die Behandlung der Optik (120 Seiten) geht von der Maxwell'schen Theorie aus. Der 5. Abschnitt, Elektrodynamik bewegter Körper und Relativitätstheorie (60 Seiten), behandelt zunächst die Theorie des ruhenden Äthers und zeigt so klar, welche experimentelle Erfahrungen dazu zwingen, auf diese Theorie zu verzichten. Dieses Verfahren erscheint dem Ref. besser, als wenn die Darstellung direkt von den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie ausgehen würde. Der letzte Abschnitt des Buches (100 Seiten) bringt die Darstellung der Wärme einschließlich der Wärmeleitung und der Wärmestrahlung. — Der vorliegende Band ist so gut und so inhaltsreich, daß man ihm eine weite Verbreitung unter den Studenten wünschen kann und gerade deshalb wohl noch die Bitte aussprechen darf, daß dem zweiten Band oder einer späteren Auflage ein Register und zur Belebung des Inhalts die Behandlung einiger praktischer Beispiele oder ein Aufgabenteil beigelegt werden möge. *Kockel* (Leipzig).

Mechanik:

● **Timoshenko, S. and D. H. Young:** *Advanced Dynamics.* New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co. 1948. 400 p., diagrams, charts, tables, cloth \$ 5,50.

Diese „Höhere Dynamik“ ist hauptsächlich zur Unterstützung von Kursen gedacht, die sich mit schnell laufenden Maschinen, Schwingungen, Ballistik und gyroskopischen Wirkungen etwa bei Raketen befassen wollen. Approximations-

methoden stehen stark im Vordergrund. Bezeichnend ist, daß das Werk von Grammel und Biezeno viel zitiert wird. Ferner das Buch von v. Sanden. Es ist also eine technische Mechanik für Fortgeschrittene. Zur Grundlegung wird auf das Werk: „Engineering Mechanics“ derselben Verff. verwiesen, doch werden die benötigten Theoreme der Allgemeinen Mechanik genügend auseinandergesetzt. Man kann natürlich nicht äußerste Schärfe verlangen. So werden z. B. innere eingeprägte Kräfte entweder beiseite gelassen oder mit der Bemerkung: wir rechnen sie zu den äußeren Kräften hinzu, abgetan. Dafür ist der konkrete Inhalt außerordentlich reich, auch die Zahl der Aufgaben beträchtlich. Das Buch zerfällt in fünf Kapitel. Das erste, Dynamik eines Partikels, könnte am besten als Lehre von den in der Punktmechanik auftretenden Differentialgleichungen bezeichnet werden. Das zweite Kapitel handelt von der Dynamik eines Systems von Punkten, enthält u. a. geradlinige Bewegung variabler Massen, Stoß, Massenausgleich und Schwungradtheorie. Das dritte Kapitel behandelt grundsätzlich die Dynamik der Systeme mit Bindungen, dabei die Lagrangeschen Gleichungen und das Hamiltonsche Prinzip, das vierte Kapitel bringt eine ausführliche Behandlung der Theorie kleiner Schwingungen, das fünfte die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt mit zahlreichen Anwendungen, z. B. Kreiselkompaß, Schiffskreisel, Einschienenbahn u. a. Ein Anhang schließlich orientiert über die Modelltheorie im Anschluß an eine Dimensionsbetrachtung. *Hamel (Landshut).*

● Housner, George W. and Donald E. Hudson: *Applied mechanics: Statics*. New York: D. van Nostrand Co., Inc.; London: Macmillan and Co., Ltd., 1949. IX, 220 p., 22 s. 6 d. net.

Weizsäcker, C. F. v.: *Eine Bemerkung über die Grundlagen der Mechanik*. Ann. Physik, VI. F. 6, 67—68 (1949).

Der Energiesatz der nichtrelativistischen Mechanik enthält neben einer Ortsfunktion gerade das Quadrat der Geschwindigkeit. Quantenmechanisch geht dies in den Laplace-Operator der Schrödingergleichung über. Das Newtonsche Gravitationspotential ist Lösung der ähnlichen, nur einfacheren Gleichung $\Delta U = 0$. Es wird auf den hierin sich andeutenden Zusammenhang zwischen dem Gravitationsgesetz und dem Newtonschen Trägheitsgesetz hingewiesen. *Volz (Erlangen).*

Pignedoli, Antonio: *Sulle curve naturali di un sistema dinamico*. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 2, 37—59 (1948).

Eine natürliche Familie von Kurven nennt Verf. nach Kasner die Kurven, die einem Variationsproblem der Form $\delta \int F ds = 0$ entspringen. Hierher gehören also die geodätischen Linien, die Kurven eines konservativen holonomen Systems, die Brachistochronen desselben Systems. Zwischen diesen Familien entdeckt Verf. interessante Beziehungen, wie die, daß geodätische Krümmung und Torsion der dynamischen Kurven und der Brachistochronen entgegengesetzt gleich sind. Auch über die Reaktion, die eine Geodätische aushalten muß, wenn sie von einem Punkt unter Wirkung eines Potentials durchlaufen wird, gibt es einen interessanten Satz. Zum Schluß wird nach den Linien konstanten Druckes auf einer Fläche gefragt. *Hamel (Landshut).*

Pignedoli, Antonio: *Sull'esistenza, per un sistema anolonomo, di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane*. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 1, 50—58 (1947).

Um ein lineares Integral der Bewegungsgleichungen nichtholonome Systeme zu finden, wird man einen nichtholonomen Geschwindigkeitsparameter (caratteristica cinetica) null setzen, woraus sich die Bedingungen ableiten lassen. *Hamel.*

Pignedoli, Antonio: *Sulla applicabilità del metodo di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi*. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 1, 78—94 (1947).

Pignedoli, Antonio: *Ancora sulla applicabilità del metodo di Jacobi della Meccanica analitica ai sistemi anolonomi*. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 2, 87—95 (1948).

Kann man auch bei nichtholonomen Systemen entsprechend der Hamiltonschen eine partielle Differentialgleichung aufstellen, aus deren vollständigem Integral nach Jacobi die Integrale der Bewegungsgleichungen gewonnen werden können? Verf. gelingt die Aufstellung der zu erwartenden partiellen Differentialgleichung, zu der allerdings wegen der nichtholonomen Bedingungen noch weitere Gleichungen zutreten, und der Nachweis, daß aus einem vollständigen Integral die Integrale gewonnen werden können. Freilich müssen die aus den Bedingungen entstehenden Differentialgleichungen noch weiter integriert werden. Leider aber sind die Differentialgleichungen nur selten miteinander verträglich. Bedingungen dafür können angegeben werden.

Hamel (Landshut).

Agostinelli, Cataldo: Sistemi anolonomi a caratteristiche cinetiche separate e moto di rotolamento di una sfera pesante sopra una superficie generica. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 2, 197—213 (1948).

In § 1 bekannte Ableitung der Bewegungsgleichungen für nichtholonome Systeme. In § 2 Systeme mit getrennten „Charakteristiken“, d. h. solchen nichtholonomen Geschwindigkeitsparametern (= caratteristiche cinetiche), für welche die Gleichungen in zwei getrennte Systeme zerfallen. In § 3 Anwendung auf den Fall der schweren Kugel auf einer Fläche. In § 4 der Fall der homogenen Kugel.

Hamel (Landshut).

Aržanyeh, I. S.: Nicht-holonome dynamische Systeme, die ein kinetisches Potential haben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 809—811 (1949) [Russisch].

Relativement à un système matériel S , à $n > 2$ degrés de liberté x^v ($v = 1, \dots, n$), astreint à $s < n$ conditions:

$$(1) \quad b_s^q \dot{x}^v + b^q = 0 \quad (q = 1, \dots, s),$$

dont les coefficients dépendent du temps, l'A. établit deux résultats. 1) Il donne la forme explicite des \dot{x}^v en fonction des coefficients de la forme quadratique non homogène $2T$, des coefficients de (1) et des coefficients de la forme $X_s \delta x^v$ — qui fournit le travail virtuel des forces extérieures correspondant au déplacement virtuel δx^v de S . 2) Il indique la condition nécessaire et suffisante pour que les équations du mouvement de S expriment l'extremum d'une forme quadratique non homogène des \dot{x}^v .

J. Kravtchenko (Grenoble).

Gallissot, François: Sur une forme des équations du mouvement d'un système matériel à liaisons holonomes ou non avec ou sans frottement. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 511—512 (1950).

Für Systeme mit einseitigen Bindungen mit oder ohne Reibung läßt sich aus den Appellschen Gleichungen eine allgemein gültige Form für die Differentialgleichung der „vitesse de contingence“ ableiten, d. h. den Vektor der Geschwindigkeitsdifferenz unmittelbar benachbarter Punkte auf der gemeinsamen Normale sich berührender Körper. Das allgemeine Theorem umfaßt ältere Theoreme von Delassus und von Pérés.

Hamel (Landshut).

Gallissot, François: Sur la discussion des éventualités dans un système à k contacts avec ou sans frottement. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 611—612 (1950).

Sonderfälle des im vorangeh. Referat genannten allgemeinen Theorems. Auch das Paradox von Painlevé wird berührt.

Hamel (Landshut).

Pignedoli, Antonio: Sul problema delle teleferiche. Moto di un corpo rigido pesante, un punto del quale è vincolato a scorrere senza attrito lungo un filo teso, soggetto a piccole oscillazione intorno alla sua configurazione rettilinea di riposo. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 2, 149—169 (1948).

Ein starrer Körper läuft mit einem seiner Punkte auf einem glatten, gespannten Faden, der kleine Schwingungen ausführen kann. Aufstellung der Bewegungsgleichungen für Körper und Faden. Sonderfälle, z. B. Rotation des Körpers um eine vertikale Schwerachse, Oszillationen des Körpers um die horizontale Achse senkrecht

zum gespannten Faden, gleichförmige Bewegung des geführten Punktes auf dem Faden. *Hamel (Landshut).*

Sestini, Giorgio: *Sopra i moti di un sistema rigido un punto del quale è vincolato ad una linea liscia.* Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 18—28 (1949).

Ein starrer Körper vollführe eine Präzessionsbewegung um seinen Schwerpunkt. Einer seiner Punkte soll so auf einer glatten Kurve geführt werden, daß die Präzessionsbewegung nicht gestört wird. Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Als Bedingung für die Kurve ergibt sich konstante Totalkrümmung. Sonderfälle. *Hamel (Landshut).*

Rubbert, F. K.: *Zur Theorie des momentfreien Kreisels.* Ann. Physik, VI. F. 5, 237—250 (1949).

Die an sich bekannte Integration der Bewegungsgleichungen des kräftefreien Kreisels wird so umgestaltet, daß sofort die Eulerschen Winkel in die Erscheinung treten. Da r dem $\cos \vartheta$ proportional ist, wo ϑ der Winkel zwischen der z -Achse und der raumfesten Impulsachse ist, hat man mit r sofort auch $\cos \vartheta$, dann aber mit p und q auch sofort die beiden anderen Eulerschen Winkel. Bemerkenswert ist die „Vektordifferentialgleichung zweiter Art“ für die Winkelgeschwindigkeit u

$$[u, \dot{u}] = \Omega \cdot u,$$

wo Ω eine Dyade ist, die auch von den Integrationskonstanten abhängt. Sie erweist sich als nützlich zur Behandlung von Polhodie und Herpolhodie. *Hamel.*

Tkačev, L. I.: *Über die 84-Minuten-Periode für Systeme mit gebundenen und freien Kreiseln.* Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 217—218 (1949) [Russisch].

M. Schuler [Phys. Z. 24, 344—350 (1923)] — et à sa suite, quelques autres auteurs — on construit des systèmes matériels pendulaires (gyro-pendules, gyro-compas, etc.) admettant une période propre constante de 84,4 minutes dans le champ de la pesanteur. L'A. étend ici cette propriété à d'autres types de systèmes (à gyros libres ou à gyros soumis à certaines liaisons). *J. Kravtchenko (Grenoble).*

Milne-Thomson, L. M.: *The pendulum.* Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 479—480 (1949).

Die Darstellung der Pendelschwingung durch elliptische Funktionen kann sehr schnell aus der Differentialgleichung durch die Substitution $\sin \frac{1}{2} \vartheta = \operatorname{sn}(u, k)$ gewonnen werden. *Hamel (Landshut).*

Pailloux, Henri: *Sur quelques problèmes d'oscillations.* C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1208—1210 (1948).

Zwei Ergänzungen zu früheren Untersuchungen: I. Welche Bedingungen müssen die Funktionen a, b, c und d von x erfüllen, wenn eine Lösung der Differentialgleichung $y''' = ay'' + by' + cy + d$ eine an beiden Enden des Intervalls mit der ersten Ableitung verschwindende Lösung haben soll? II. Bei einem Schwinger mit Dissipation läßt sich bei konstanten Koeffizienten der drei quadratischen Formen eine quadratische Gleichung für das r in $q_k = A_k e^{rt}$ aufstellen, die allerdings von den A_k abhängt. *Hamel (Landshut).*

Haag, Jules: *Sur la stabilité des points invariants d'une transformation.* Bull. Sci. math., II. S. 73₁, 123—134 (1949).

Es handelt sich um eine rein mathematische Untersuchung, die als Hilfsmittel zu den umfangreichen Arbeiten des Verf. über die Synchronisation nichtlinearer Schwinger dienen soll. Invariante Punkte sind solche Punkte, die bei einer Transformation im m -dimensionalen Raum fest bleiben. Stabil heißt eine solche Transformation, wenn auch bei fortgesetzter Wiederholung eine hinreichend kleine Umgebung des invarianten Punktes in einen Teil von sich selbst abgebildet wird. Unter Annahme stetiger erster und zweiter Ableitungen wird die Transformation zuerst auf eine Normalform gebracht, durch Einführung sogenannter kanonischer Variablen, die im unendlich Kleinen eine bloße Dehnung erfahren, deren Faktoren S_i Wurzeln

einer Gleichung m -ten Grades sind, die als verschieden angenommen werden. Ein Teil der Ergebnisse steht schon in einer Arbeit von Samuel Lattés [Ann. Mat. pura appl., Milano, III. S. 13, 1—137 (1906)]. Verf. kommt es hauptsächlich auf die Ausdehnung dieser Ergebnisse auf den Fall an, daß noch ein kleiner Parameter λ vorkommt. Ferner interessieren invariante Untermannigfaltigkeiten. Solche existieren, wenn einige der „Dekremente“ S gleich 1 sind, und sind stabil, wenn die anderen Dekremente absolut kleiner als 1 sind. Auch im Falle eines Parameters kann die Stabilitätsbedingung angegeben werden. *Hamel (Landshut).*

Solodovnikov, V. V.: Ein Kriterium für die Qualität der Regulierung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 977—980 (1948) [Russisch].

Un problème de régulation linéaire a conduit l'A. au problème d'analyse suivant. Considérons:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{J(z)}{z} e^{zt} dz$$

où le chemin d'intégration C est formé de l'axe imaginaire et d'un petit demi-cercle entourant l'origine et où $J(z)$ est une fonction donnée. Il s'agit de caractériser $J(i\omega)$, ω réel, de façon que $\delta(t)$ soit intérieur à un domaine convenable. L'A. donne une condition nécessaire et suffisante pour que le critère précédent soit satisfait.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Staržinskij, V. M.: Über die Eigenschwingungen einer elektrischen Kontroll-zuführungsleitung. Prikl. Mat. Mech., Moskva 13, 41—50 (1949) [Russisch].

L'A. décrit un servo-moteur à entretien électrique dont il fait une théorie approchée, en tenant compte des frottements. Il discute avec soin les différents régimes de fonctionnement et calcule les valeurs critiques des caractéristiques, tant dynamiques qu'électriques, de son appareil. — Ce mémoire paraît offrir un exemple intéressant d'une étude théorique complète (nécessairement approchée) d'un instrument très complexe.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Minorsky, Nicolas: Sur l'oscillateur de van der Pol. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 60—61 (1949).

Als van der Polscher (VDP) Oszillator wird ein nichtlinearer Oszillator durch folgende Differentialgleichung definiert: $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$. In diese Gleichung wird mit $\varrho = r^2 = x^2 + \dot{x}^2$ die Energie als abhängige Variable eingeführt. Man erhält:

$$\dot{\varrho} = 2\varepsilon(1 - \varrho \cos^2 \theta) \varrho \sin^2 \theta, \quad \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(1 - \varrho \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{[2\varepsilon(1 - \varrho \cos^2 \theta) \varrho \sin^2 \theta]}{[1 + \varepsilon(1 - \varrho \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta]}$$

Man setzt $\varrho = \varrho_0 + \varepsilon \varrho_1 + \varepsilon^2 \varrho_2 + \dots$ und erhält durch Gleichsetzen der Glieder von der gleichen Ordnung in ε eine Reihe von Differentialgleichungen für $\varrho_0, \varrho_1(\theta), \varrho_2(\theta), \dots$. Als periodische Lösung ergibt sich angenähert:

$$\varrho(\theta) = 4 + \varepsilon(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 4\theta + \frac{5}{12} \cos 6\theta - \frac{1}{4} \cos 8\theta \right).$$

Die Energieverhältnisse werden für kleine und große Werte von ε untersucht, wobei die Methode der Isoklinen eine Rolle spielt. *Lassen (Berlin).*

Aronovič, G. V.: Zur Theorie des Shimmys der Automobile und Flugzeuge. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 477—488 (1949) [Russisch].

L'A. apporte une contribution intéressante à la théorie des vibrations, autour d'un axe vertical, des roues des machines telles que l'automobile et l'avion (phénomène connu sous le nom de shimmy). — L'étude complète du phénomène relève d'un problème très compliqué de Mécanique non linéaire. Aussi, les travaux antérieurs [parmi lesquels nous retiendrons ceux de Rocard, Rev. Sci. Paris 84, No. 15 (1946) et de Keldysch, Publ. Inst. Centr. Aérodyn. Moscou 1945, No. 564] se

limitent uniquement à la discussion des conditions de la naissance du shimmy sur les équations linéarisées (ce qui est, aussi, le point de vue de l'A.), écrites pour le système des roues seules. L'analyse de l'A. est plus complète; il fait intervenir les caractéristiques dynamiques de l'ensemble de la machine et tient compte de l'effet dit du „tramping“ (en négligeant les effets secondaires, tels que la variation du diamètre des roues due aux déformations du pneu). L'A. parvient ensuite à discuter qualitativement la stabilité de certains régimes stationnaires, en mettant en évidence le rôle, parfois prépondérant, des facteurs négligés par ses prédécesseurs.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Weber, Max: Beitrag zur Messung von Erschütterungen. *Helvetica physica Acta* 22, 425—456 (1949).

Verf. gibt zunächst eine Darstellung der dynamischen Grundgleichungen für Relativbewegung, wobei im Anschluß an Arbeiten von F. Gassmann außer dem Absolutsystem mehrere Relativsysteme berücksichtigt werden, so daß die relativen Bewegungen des im Erschütterungsmesser eingebauten schwingungsfähigen Gebildes gegenüber dem äußeren Rahmen oder Gehäuse einerseits sowie die Bewegungen des Gehäuses gegenüber dem absoluten Raum andererseits erfaßbar sind. Die rechte Seite der so gewonnenen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält dann verschiedene charakteristische Terme, deren gesonderte Behandlung im wesentlichen auf drei Grundtypen des im Erschütterungsmesser sich einstellenden Schwingungsvorganges führt. Hierbei lassen sich leicht die Bedingungen auffinden, unter denen der Erschütterungsmesser als idealer Amplitudenmesser oder Beschleunigungsmesser arbeitet; maßgeblich hierfür ist u. a., ob das Verhältnis der Erschütterungsfrequenz zur Eigenfrequenz einen besonders großen oder kleinen Wert annimmt. Weiter werden diskutiert der prismatische Stab ohne und mit Einzelmasse als Erschütterungsmesser, der dreieckförmig zugespitzte Stab, sowie einige weitere Typen. Schließlich erörtert Verf. technische Einzelheiten über Aufbau, Eichung und Handhabung von Erschütterungsmessern im praktischen Betrieb. *H. Neuber* (Dresden).

Pylarinos, O.: Über das Dreikörperproblem. *Acta math.*, Uppsala 81, 257—263 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [*Math. Z.* 47, 351—372 (1941); dies. Zbl. 26, 23] untersucht Verf. den allgemeinen Fall des Dreikörperproblems, wo die Ebene der drei Körper beständig durch eine in bezug auf ein Inertialkoordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkte der drei Massen feste Gerade hindurchgeht. Zunächst wird der Hilfssatz bewiesen, daß, wenn die Körper eines isolierten Systems dauernd in einer Geraden liegen, diese Gerade in bezug auf das obige Koordinatensystem entweder festbleiben oder sich um den Schwerpunkt in einer festen Ebene drehen muß, wobei im letzteren Falle die Abstandsverhältnisse von den Körpern während der Bewegung konstant bleiben. Wird nunin genannten Dreikörperproblem die z -Achse als die feste Gerade gewählt, so liegen die Projektionen der drei Körper auf die xy -Ebene ebenso wie die Projektionen ihrer Beschleunigungen beständig in der Knotenlinie der drei Körper auf der xy -Ebene, und der Hilfssatz ist anwendbar; während der Bewegung sind also die Abstände der drei Körper von der Drehachse von der Zeit unabhängigen Größen proportional. Setzt man weiter voraus, daß die Wechselwirkung von je zweien der drei Körper dem Produkt aus den Massen beider Körper und der $-(\nu-1)$ -ten Potenz ihrer Abstände proportional ist, so besteht, wie Verf. zeigt, zwischen den gegenseitigen Entfernungen a_{ik} der drei Körper eine Beziehung von der Form $A_1 a_{23}^{-\nu} + A_2 a_{31}^{-\nu} + A_3 a_{12}^{-\nu} = 0$, wo A_1, A_2, A_3 von der Zeit unabhängige Größen sind, von denen mindestens zwei $\neq 0$ sind.

Volk (Würzburg).

Polachek, Harry: Solution of the differential equations of motion of a projectile in a medium of quasi-newtonian resistance. *Quart. appl. Math.* 7, 275—291 (1949).

Verf. entwickelt ein Näherungsverfahren zur Lösung der Differentialgleichungen,

welche die Bewegung eines Körpers in einem Medium, in dem das Newtonsche quadratische Luftwiderstandsgesetz nur näherungsweise zutrifft, beschreiben. Es gründet sich auf die Variation der Bahnelemente nach Moulton (New methods in exterior ballistics, Chicago 1926, Ch. IV) und die Einführung geeigneter Störungsglieder. Alle Differentialglieder von 2. Ordnung an werden vernachlässigt. Als Musterbeispiel erfolgt die Bahnbestimmung für ein Geschloß mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 300 m/s bei einem Erhebungswinkel von 60° nach der neuen Methode einerseits und der üblichen Methode der sukzessiven Approximationen andererseits. Die nach beiden Verfahren erzielten Schußweiten stimmen bis auf weniger als 1 m überein und ergeben 4240 m. Da die Anfangsgeschwindigkeit des Beispiels bereits 88% der Schallgeschwindigkeit beträgt und der Erhebungswinkel sehr groß gewählt wurde, glaubt Verf., daß die neue Methode für alle Bahnen mit einer Anfangsgeschwindigkeit unterhalb der Schallgeschwindigkeit brauchbar sein wird und genaue Ergebnisse liefern wird. Es ist noch zu bemerken, daß die Änderung der Dichte mit der Höhe in Rechnung gestellt wurde. Verf. weist darauf hin, daß die Methode mit leichten Abänderungen verallgemeinerungsfähig ist, wenn etwa an Stelle des Newtonschen ein anderes Widerstandsgesetz tritt, für welches eine Lösung der Bewegungsgleichungen (wie im Newtonschen Fall) in geschlossener Form angegeben werden kann.

Garten (Tübingen).

Grammel, R. und K. Zoller: Zur Mechanik der Peitsche und des Peitschenknalles. Z. Physik 127, 11—15 (1950).

Wenn eine Peitschenschnur, die an einer Stelle eine Umlenkung um 180° aufweist, an ihrem einen (z. B. dem rechten) Ende etwa mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts gezogen wird, so beschreibt der andere Endpunkt eine beschleunigte Bewegung nach links. Unter vereinfachten Annahmen wird dieser Bewegungsvorgang durch eine elementare Rechnung beschrieben und wird gezeigt, daß die Geschwindigkeit des linken Endpunktes gegen Schluß der Bewegung kurzzeitig über jede Grenze, also auch über die Schallgeschwindigkeit anwachsen kann, womit die Entstehung des Peitschenknalles ihre Erklärung findet. R. Zurmühl (Darmstadt).

Elastizität. Plastizität. Akustik:

Postacıoğlu, Bekir: Remarques sur les conditions d'existence des courbes intrinsèques. Bull. Techn. Univ. Istanbul 1, 36—47 und türkische Zusammenfassg. 36 (1948).

Die Schar der Mohrschen Kreise $\{x - p\}^2 + y^2 = r^2\{p\}$ hat die Hüllkurve $x = p - r r', y = r \sqrt{1 - r'^2}$. Diese existiert nicht, wenn $r'^2 > 1$. Im Falle $\frac{|r\{p_m\} - r\{p_n\}|}{p_m - p_n} > 1$ existiert die Hüllkurve für einen gewissen Wert p nach dem Rolleschen Satze nicht. Die Zugfestigkeit wird mit R' , die Schubfestigkeit mit T und die Druckfestigkeit mit R bezeichnet. Zu $p - R'/2$, 0 und $R/2$ gehören $r = -R'/2$, T und $R/2$. Wenn $T > -R'$ oder R , existiert die Hüllkurve nicht.

Wenn $r = a p + b$, ist $a = \frac{R + R'}{R - R'}$, d. h. die Hüllkurve $y = \frac{R + R'}{2\sqrt{-R R'}} x - \frac{\sqrt{-R R'}}{2}$

existiert immer. $T = \frac{-R R'}{R - R'}$. Wenn $r^2 = A p^2 + 2 B p + C$, existiert die Hüllkurve unter den Bedingungen $0 < A < 1$ und $A C - B^2 > 0$, d. h. $T < R R' / (R - R')$. Wenn $p = A r^2 + 2 B r + C$, sichert $(1 - 2 B) / 2 A < -R'/2$ die Existenz der Hüllkurve im Gebiet $R'/2 \leq p < \infty$. Anm. des Ref.: S. 42 in Δ müssen die Quadrate gestrichen werden; in Δ_B fehlt der Faktor -1 ; wenn $r = A p^m + B$, ist $\{dp/dr\}_{p=0} = 0$; in m muß $\ln R/R'$ durch $\ln R/(-R')$ ersetzt werden; die Funktion $r = \ln \{A p + B\}$ ist unmöglich, da r die Dimension einer Spannung hat. Auf S. 45 muß r durch r^2 ersetzt werden; im Radikanden $4 T^2 + R R'$ fehlt der

Faktor -1 ; die Hyperbel muß durch ihre konjugierte ersetzt werden; in der Hyperbelgleichung muß T durch T^2 ersetzt werden. Konrad Ludwig (Hannover).

Mackenzie, J. K.: The elastic constants of a solid containing spherical holes. Proc. phys. Soc. London, Sect. B **63**, 2—11 (1950).

Im Innern eines homogenen, isotropen, elastischen Materials wird eine willkürliche Verteilung kugelförmiger, voneinander getrennter Hohlräume angenommen. Das Volumen aller dieser Hohlräume wird als klein gegenüber dem Gesamtvolumen des Körpers und ferner die Anzahl der Hohlräume als sehr groß vorausgesetzt. Zur Berechnung der Zusammendrückbarkeit und des Schubmoduls dieses so beschaffenen Stoffes wird als Hilfsmittel ein äquivalentes homogenes Kontinuum eingeführt. Die elastischen Konstanten k und μ dieses fiktiven Kontinuums werden nun in Abhängigkeit von den elastischen Eigenschaften des wirklichen Materials und von Anzahl und Größenverteilung der Hohlräume untersucht. Bei hinreichend großen Volumina werden diese Konstanten von der äußeren Begrenzungsform der Körpers unabhängig sein, und daher wird diese Einfachheit halber als Kugel gewählt. Jeder Hohlraum wird so zunächst von einer Kugelschale mit wirklichem Material umgeben gedacht, und die Wirkung des Restmaterials wird dadurch abgeschätzt, daß eine weitere Kugelschale mit äquivalentem homogenem Material hinzugenommen wird. Sowohl Dichte als auch Verformung der äußeren Kugelbegrenzung müssen nun gleich bleiben, wenn der Hohlraum und seine innere umgebende Kugelschale mit äquivalentem homogenem Material ausgefüllt wird. Die tatsächlichen elastischen Konstanten ergeben sich aus einem Verzerrungszustand der äußeren Kugelhülle, indem man die Spannungen, die in dem wirklichen Körper hervorgerufen werden, vergleicht mit den Spannungen, die bei derselben Verzerrung in dem fiktiven, homogenen, isotropen Körper erzeugt werden. Nach H. Fröhlich und R. Sack [Proc. R. Soc. London A **185**, 415 (1946)] gestattet eine Art Störungsrechnung zufolge der Annahme, daß das Volumen aller Hohlräume hinreichend klein gegenüber dem Totalvolumen ist, die Bestimmung der Konstanten wie folgt:

$$1/k = 1/k_0 \varrho + 3(1-\varrho)/4 \mu_0 \varrho + O[(1-\varrho)^3],$$

$$(\mu_0 - \mu)/\mu_0 = 5(1-\varrho)(3k_0 + 4\mu_0)/(9k_0 + 8\mu_0) + O[(1-\varrho)^2],$$

wobei sich k_0 und μ_0 auf das tatsächliche Material beziehen und ϱ die Dichte des fiktiven Materials, bezogen auf diejenige des tatsächlichen Materials, bedeutet. Hieraus folgt, daß einige Hohlräume in einem sonst völlig unzusammendrückbaren Medium eine ganz beträchtliche Zusammendrückbarkeit erzeugen können. Wird endlich in den Hohlräumen selbst ein Druck ausgeübt und bedeutet p das bewichtete Mittel aller dieser Hohlraumdruckwerte, wobei die Gewichte proportional zu den Hohlraumvolumina anzusetzen sind, so folgt für die Dehnung \bar{p} ($1/k - 1/k_0$). Unter Anwendung der hydrodynamischen Analogie des elastischen Problems wird schließlich die Theorie auf Sintererscheinungen angewandt zur Bestimmung der effektiven Viskosität einer Flüssigkeit, die kleine Gasbläschen enthält. Garten (Tübingen).

Herpin, André: Extension des relations de Cauchy aux coefficients d'élasticité du troisième ordre. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 921—922 (1949).

Verf. setzt sich zum Ziel, in der Entwicklung des elastischen Potentials eines isotropen Körpers nach den Potenzen der Dilatation

$$U = U_0 + (\lambda/8) I_1^2 + (\mu/4) I_2 + A I_1 I_2 + B I_1^2 + C I_3$$

(wobei $I_1 = \sum_i e_{ii}$, $I_2 = \sum_{i,k} e_{ik} e_{ki}$, $I_3 = \sum_{i,k,l} e_{ik} e_{kl} e_{li}$ die drei Deformationsinvarianten und λ

und μ die Laméschen Elastizitätskonstanten bedeuten) die Koeffizienten A, B, C , deren Berechnung aus den Molekularkräften wegen der ungenügenden Kenntnis dieser Kräfte nicht möglich ist, wenigstens der Größenordnung nach in dem Fall, wo die Cauchyschen Relationen erfüllt sind (die sich für einen isotropen Körper auf $\lambda = \mu$ reduzieren), zu bestimmen. Er setzt lediglich voraus, daß der Körper aus zufällig verstreuten Molekülen besteht, die nur von einem Potential $\varphi(r)$ herrührenden Zentralkräften unterworfen sind. Er entwickelt den Energieinhalt nach den Potenzen der Molekülverrückungen und geht hier bis zur dritten Potenz und nimmt weiterhin an, daß der Körper einer homogenen Deformation unterworfen ist. Für die Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung ergibt sich wieder die klassische Relation von Cauchy

$$\lambda = \mu = N/60 \sum_i r_{0i}^6 \left[(1/r) \frac{d}{dr} \left(1/r \frac{d\varphi}{dr} \right) \right]_{r=r_{0i}}$$

(r_{0i} Abstand des betr. Moleküls vom Ursprung, N Anzahl der Moleküle pro cm^3 , die Summation über alle Moleküle zu erstrecken). Für die Koeffizienten dritter Ordnung findet Verf.

$A = (11/16) \Phi^{(3)}/105$, $B = (3/16) \Phi^{(3)}/105$, $C = \Phi^{(3)}/105$ mit

$$\Phi^{(3)} = N/12 \cdot \sum_i r_{0i}^6 \left\{ 1/r \frac{d}{dr} \left[1/r \frac{d}{dr} \left(1/r \frac{d\varphi}{dr} \right) \right] \right\}_{r=r_{0i}}$$

Die drei Koeffizienten A, B, C genügen also den Beziehungen $(16/11)A = (16/3)B = C$ und ihre Größenordnung wird unter Verwendung eines Satzes aus der klassischen Theorie der ther-

mischen Dilatation

$$A = -0,176 \lambda, B = -0,048 \lambda, C = -0,257 \lambda.$$

Garten (Tübingen).

Roma, Maria Sofia: *Integrazione del sistema di equazioni dell'elastostatica tridimensionale in un manicotto cilindrico illimitato.* Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 2, 63—83 (1950).

Die Integration der statischen elastischen Grundgleichungen für die Verschiebungen eines unendlich langen Hohlzylinders, bei dem auf den Mänteln entweder die Spannungen oder die Verschiebungen gegeben sind, wird zurückgeführt auf die Lösung eines Systems von 6 linearen inhomogenen Gleichungen für 6 Unbekannte mit nicht verschwindender Determinante: Die Fouriertransformierten der Verschiebungen u, v, w in Zylinderkoordinaten ϱ, θ, z

$$u_n(\varrho, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z} dz \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} u d\theta,$$

entsprechend für v_n, w_n , sollen existieren. Dann ergibt sich unter passenden Regularitätsvoraussetzungen für u_n, v_n, w_n ein System von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung in Abhängigkeit der Variablen $\alpha \varrho$. Seine allgemeine Lösung stellt sich dar als Linearkombination von Besselfunktionen 1. und 2. Art mit 6 unabhängigen Koeffizienten, die sich im Falle des Vollzylinders auf 3 erniedrigen. Die Randbedingungen ergeben dann beim Übergang zu den entsprechenden Fouriertransformierten der Spannungskomponenten 6 lineare Bedingungen für diese Konstanten, ihre Determinante ist für alle Werte von α von Null verschieden. Am Spezialfall des Vollzylinders unter rotationssymmetrischer Belastung durch normalen Außendruck ist die Rechnung für $n = 0$ im einzelnen durchgeführt mit allen Konvergenzbeweisen der auftretenden uneigentlichen Integrale.

R. Moufang.

Fichera, Gaetano: *Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 582—589 (1949).

Verf. untersucht nach einer Methode von Picone [Ann. Scuola norm. Sup. Pisa, II. S. 5, 213—283 (1936); dies. Zbl. 14, 261] die elastische Verformung einer materiellen Kugelschicht in dem besonderen Fall, daß eine durch die Kugelmitte gehende Gerade als Symmetrieachse des Verformungszustandes auftritt. Die Verrückungen eines Innenpunktes der Schicht werden in Form einer Entwicklung nach Legendreschen Kugelfunktionen angesetzt. Wird auf die Außenfläche der Schicht ein hydrostatischer Druck ausgeübt, so ergibt sich die Lösung in geschlossener Form, indem alle Entwicklungsglieder von höherer als dritter Ordnung fortfallen.

Garten (Tübingen).

Maccafferri, Luisa: *La formula per la variazione di volume nell'elasticità ereditaria.* Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 46—49 (1949).

Das Reziprozitäts-Theorem von Betti liefert die bekannte Formel, die die integrale Volumendehnung eines elastisch deformierten Körpers durch die Massen- und Oberflächenkräfte ausdrückt. Eine analoge Formel wird hier für elastische Nachwirkungsvorgänge abgeleitet, wenn für die Nachwirkung der Volterrasche lineare Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor besteht. Als dann ergibt sich zwischen den Spuren beider Tensoren eine lineare Volterrasche Integralgleichung, deren Kern $k(t, \tau)$ durch die Nachwirkungskerne im Verformungsgesetz bestimmt ist. Unter Benutzung einer Integralbeziehung von Signorini ergibt sich dann der gesuchte Ausdruck A für die Volumendehnung durch Integration über das Gesamtvolumen des Körpers. Er unterscheidet sich von dem üblichen Ausdruck durch ein additives Integral nach der Zeit τ , dessen Integrand im wesentlichen $k(t, \tau) A(\tau)$ ist.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Gross, Wolf: *Sulla matrice di Green di un problema di elasticità piana.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 444—448 (1949).

Berechnung des Spannungs- und Verzerrungszustandes für den Fall, daß eine Kreisscheibe durch stetig auf ihrem Rand verteilte Kräfte beansprucht wird. Die Airysche Spannungsfunktion und die Kraftkomponenten werden dabei als Fouriersche Reihen angesetzt. *Garten* (Tübingen).

Carrier, G. F.: The extrusion of plastic sheet through frictionless rollers. *Quart. appl. Math.* **6**, 186—192 (1948).

Auf der Grundlage der de St. Venantschen Theorie des plastischen Gleichgewichts eines ebenen Kontinuums wird bei reibungsfreiem Walzen eines Bleches, dessen Dicke klein ist gegen den Walzradius, die in der Technik übliche Näherungsformel, die auf Grund der eindimensionalen Theorie abgeleitet wird, als Näherungslösung wiedergefunden. Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen wird mit Hilfe einer Approximation der unbekannten Funktionen im Mittel durch endliche Reihenentwicklungen zurückgeführt auf eine nicht-lineare Volterrasche Integralgleichung, die mit sukzessiver Approximation gelöst werden kann. Die ersten Näherungen liefern bereits die gewünschte Formel. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

Pastori, M.: Plasticità. *Rend. Sem. mat. fis. Milano* **18**, 93—113 (1948).

Zusammenfassender Bericht über einige bekannte klassische und einige jüngere Untersuchungen aus der Arbeitsgemeinschaft des Mailänder Seminars über verschiedene Ansätze zur Beschreibung des elastisch-plastischen und des zähplastischen Fließens. Verschiedene Verformungsgesetze und Fließbedingungen werden begrifflich und auch in bezug auf calculmäßig sich daraus ergebende Schwierigkeiten diskutiert. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

Symonds, P. S.: The determination of stresses in plastic regions in problems of plane flow. *J. appl. Physics, Lancaster Pa.* **20**, 107—112 (1949).

Unter Heranziehung der von Hencky erkannten Bedeutung der Fließlinien für das plastische Gleichgewicht wird ein einfaches numerisch-graphisches Lösungsverfahren angegeben zur Bestimmung des Gleichgewichts eines ideal-plastischen ebenen Körpers mit beliebiger Berandung. Die Rechnung wird durchgeführt für den Fall eines lastfreien elliptischen Randes für verschiedene Werte des Hauptachsenverhältnisses und weiter für die Bestimmung der Last, die in einem auf Zug beanspruchten Flachstab mit 2 elliptischen Außenkerben Fließen hervorruft. In ähnlicher Weise läßt sich auch der Zugstab mit elliptischem Loch behandeln.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Dorn, John E.: Stress-strain rate relations for anisotropic plastic flow. *J. appl. Physics, Lancaster Pa.* **20**, 15—20 (1949).

Bisher liegen wenig Untersuchungen vor zur Beschreibung des plastischen Verhaltens anisotroper Stoffe. Für gewalzte Bleche wird hier eine Systematik versucht mit der Grundannahme, daß die Verzerrungsgeschwindigkeiten in erster Näherung linear von den Spannungen abhängen; die 36 Koeffizienten der Zuordnung hängen dabei von der Vorgeschichte und dem Verformungsgrad ab. Bei ebenem plastischen Fließen reduzieren sie sich auf 9 und unter Berücksichtigung der in jedem gewalzten Metall vorhandenen Symmetrieebenen weiter auf 5. Im Falle verschwindender Volumendehnung gehen bei voller Symmetrie in den 3 Koordinatenrichtungen diese Gleichungen in das übliche Verformungsgesetz über. Die Abhängigkeit der Fließspannung σ von der Verfestigung wird auch bei Anisotropie versuchsweise durch die Formänderungsenergie erfaßt in Analogie zum R. Schmidtschen Verfestigungsgesetz. Bisher liegt nur ein Versuch vor, der jedoch nur bei kleinen Formänderungen die Unabhängigkeit der Verfestigungskurve von der Belastungsart zeigt. Die Fließbedingung von Mises gibt für verschiedene Grade der Symmetrie ein wenig voneinander abweichende Ellipsen.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Cattaneo, Carlo: Sul calcolo di alcuni potenziali e sul loro intervento nella risoluzione di particolari problemi armonici. *Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena* **3**, 29—45 (1949).

Man bilde mit $\mu^s = \sqrt{1 - \varrho^2/a^2}$, $\varrho^2 = x^2 + y^2$, ($s = -1, 1, 3, 5, \dots$) das Potential $V_s(x, y, z) = \int_{\sigma} \mu^s \frac{1}{r} d\sigma$ einer in der xy -Ebene gelegenen Kreisscheibe σ vom Radius a um den Nullpunkt, die mit der Massendichte μ^s belegt ist. Ist $\bar{V}_s(x, y) = \lim_{z \rightarrow 0} V_s(x, y, z)$, so sind alle \bar{V}_s Polynome in ϱ^2 vom Grade $\frac{1}{2}(s+1)$

mit rekursiv berechenbaren Koeffizienten. Die V_s sind von Nutzen zur Lösung einiger Probleme der Potentialtheorie für den Halbraum mit gemischten Randbedingungen an der Begrenzungsebene, z. B. 1. In σ sei ein beliebiges Polynom $P_n(x, y)$, das nur von ϱ^2 abhängt, vom Grade n gegeben. Gesucht ist eine in $z \geq 0$ reguläre Potentialfunktion $\varphi(x, y, z)$, die im Unendlichen verschwindet, so daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ in } z = 0 \text{ für } \varrho > a, \quad \varphi = P_n(x, y) \text{ in } z = 0 \text{ für } \varrho \leq a.$$

Die allgemeinere Aufgabe, daß das Polynom in beliebiger Weise von x, y abhängt, läßt sich auf diese zurückführen. 2. Man bestimme die elastischen Schwingungen einer Kreisscheibe um eine Gleichgewichtslage in einer unendlich ausgedehnten, von Reibung und Massenkraften freien Flüssigkeit konstanter Dichte. Als Formänderungen der Scheibe sind normale Verschiebungen und Drehungen um einen Durchmesser zugelassen. Es zeigt sich, daß die Anwesenheit der Flüssigkeit keine Dämpfung der elastischen Schwingungen der Scheibe bewirkt, sie erniedrigt nur die Hauptfrequenzen der Schwingung.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Cooper, J. L. B.: The propagation of elastic waves in a rod. *Philos. Mag.*, J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 38, 1—22 (1947).

Bei periodischen elastischen Wellen längs eines Stabs gibt es zu jeder Wellenlänge eine unendliche Folge diskreter Phasengeschwindigkeiten, welche einer Folge verschiedener möglicher Schwingungszustände entsprechen. Diese Phasengeschwindigkeiten variieren mit der Wellenlänge und nehmen Werte bis unendlich an. Trotzdem muß man erwarten, daß etwa die Front einer Stoßwelle sich längs des Stabes nicht schneller als mit der Geschwindigkeit V_D der Dichtewellen fortpflanzen kann. Verf. sucht diese Erwartung aus der Theorie der Stabwellen zu bestätigen. Zur Vereinfachung wird das Problem nur zweidimensional behandelt, d. h. statt eines Stabes wird eine Platte betrachtet. Der Deformationszustand kann dann aus zwei Potentialfunktionen $\varphi(x, y, t)$ und $\psi(x, y, t)$ abgeleitet werden, die den Wellengleichungen

$$V_D^2 \Delta \varphi = \partial^2 \varphi / \partial t^2, \quad V_n^2 \Delta \psi = \partial^2 \psi / \partial t^2$$

genügen (V_D, V_n Geschwindigkeiten der Dichte- und Schubwellen). An der Plattenoberfläche $y = \pm b$ müssen φ, ψ Randbedingungen erfüllen, die die Spannungsfreiheit ausdrücken. — Vorgegeben sei ein etwa durch Stoß erzeugter Anfangszustand $\varphi(x, y, 0), \psi(x, y, 0), \varphi_t(x, y, 0), \psi_t(x, y, 0)$, und zwar seien Anfangsdeformation und Deformationsgeschwindigkeit nur in einem beschränkten räumlichen Bereich von null verschieden. — Die Lösung der Aufgabe läßt sich in der Form einer Fourierdarstellung

$$(1) \quad \varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty} \left[\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \Phi(y, p, w) e^{-i(wt + px)} dw \right] dp \quad (\alpha, \beta \text{ beliebig } > 0)$$

(analog für ψ) geben, wo die Fouriertransformierte Φ quellenmäßig durch die Fouriertransformierten der obigen Anfangswerte dargestellt werden kann. Φ erweist sich als meromorphe Funktion von w und ist regulär in $\text{Im } w > 0$ (für $t > 0$). Mit den Residuen $\frac{1}{i} Z(y, p, w_n)$ von $\Phi(y, p, q)$ kann (1) dann verwandelt werden in

$$(2) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty} Z(y, p, w_n) e^{-i(w_n t + px)} dp.$$

Verf. zeigt nun, daß für $p \rightarrow i\infty$ die Pole $w_n(p)$ teils $\rightarrow p V_D$, teils $\rightarrow p V_n$ und teils $\rightarrow p V_s$ (V_s = Geschwindigkeit der Rayleighschen Oberflächenwellen) streben. Daraus folgert er dann durch Verlegung des Integrationswegs in (2) nach $\beta \rightarrow \infty$, daß die Grenze zwischen erregtem und unerregtem Gebiet höchstens mit der Geschwindigkeit V_D fortschreitet. — Für reelle p werden auch die Pole $w_n(p)$ reell; sie entsprechen dann den möglichen rein periodischen Plattenwellen [die schon von Rayleigh und Lamb untersucht worden sind (Anm. d. Ref.)]. Deren Phasengeschwindigkeit $V = w_n/p$ in Abhängigkeit von p wird ausführlich diskutiert. Daß V Werte $V > V_D$ annehmen kann, macht Verf. anschaulich verständlich durch den Hinweis, daß diese Plattenwellen aus ebenen Wellen bestehen, die zwischen den Plattenoberflächen im allgemeinen schräg im Zick-Zack hin- und herreflektiert werden.

A. Schoch (Göttingen).

Pailloux, Henri: Choc longitudinal d'une barre prismatique. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 2006—2008 (1949).

Ein homogener Balken vom Querschnitt A habe die Dichte ρ und den Elastizitätsmodul E . Seine eine Basisfläche falle mit $x = 0$, die andere mit $x = 1$ zusammen. Im Augenblick $t = 0$ stoße eine Masse m mit der Geschwindigkeit V gegen das Ende $x = 1$ des Balkens, dessen Masse M sei. Zur Bestimmung der Verdrückung $u(x, t)$ der Balkenteilchen und der dort herrschenden Spannung $S(t, x)$ ist die Integration der Schwingungsgleichung $\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2$, $a^2 = E/\rho$ unter den Anfangs- und Randbedingungen $u(x, 0) = 0$ für $0 \leq x \leq 1$, $\partial u / \partial t|_{t=0} = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $= V$ für $x = 1$ sowie $u(0, t) = 0$, $S(1, t) = m \partial^2 u(1, t) / \partial t^2$ erforderlich. Die Lösung wird durch Entwicklung nach Orthogonalfunktionen entsprechend

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \alpha_n a t + B_n \sin \alpha_n a t) \sin \alpha_n x$$

gefunden, wo α_n die n -te Wurzel der transzendenten Gleichung $\alpha \operatorname{tg} \alpha = M/m = k$ bedeutet. Es ergibt sich

$$u(x, t) = \frac{4V}{ka} \sum \frac{\sin \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \sin \alpha a t \cdot \sin \alpha x,$$

wo über alle positiven Wurzeln α zu summieren ist. In ähnlicher Weise wird der Ausdruck für die Spannungsverteilung im Balken gefunden.

Hardtwig.

● **Reiner, Markus:** Deformation of flow: an elementary introduction to theoretical rheology. London: H. K. Lewis and Co., Ltd., 1949. XIX, 346 p.; 32 s. 6 d. net.

Tjabin, N. V.: Die Grundgleichungen der Rheologie einer Maxwell'schen Flüssigkeit. Z. eksper. teor. Fiziki, Moskva, Leningrad 19, 559—560 (1949) [Russisch].

L'A. établit l'équation fondamentale du phénomène d'une manière originale et donne les lois de la similitude pour les mouvements que cette équation gouverne.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Bartenev, G. M.: Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Zeit der Einwirkung der Belastung bei brüchigem Zerreißen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 23—26 (1950) [Russisch].

Hydrodynamik:

Ghosh, N. L.: A note on the equilibrium of fluid matter in a steady differential rotation. Bull. Calcutta math. Soc. 39, 131—138 (1947).

Verf. beschäftigt sich mit Flüssigkeitsmassen, deren Teilchen mit variabler Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse rotieren. Die Bedingung, daß das Gravitationspotential Φ eine Funktion des Dichte ρ allein ist, bedingt, daß $\rho \omega^2$ eine Funktion des Abstandes r von der Achse und $|\nabla \rho|^2$ und $\nabla^2 \rho$ Funktionen von ρ sind. Als Illustration werden drei verschiedene Konfigurationen eines schweren kugelförmigen Kernes mit einer rotierenden Atmosphäre näher betrachtet. Eine Druck-Dichte-Relation wird nicht angenommen.

E. Hölder (Leipzig).

Moreau, Jean-Jacques: Sur l'interprétation tourbillonnaire des surfaces de glissement. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1923—1925 (1949).

Bekanntlich faßt man eine Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit in der Hydrodynamik gerne als eine konzentrierte Wirbelfläche auf. Verf. sucht Bedingungen dafür, daß diese Auffassung konsequent durchgeführt werden kann. Sie sei invariant gegen lineare Integraltransformationen und auch gewisse quadratische Transformationen. Es wird eine Formel für die Ableitung der tangentialen Wirbelkomponente abgeleitet und daraus auf die Zulässigkeit der Konstruktion von Wirbelfäden geschlossen.

Hamel (Landshut).

Olver, F. W. J.: Transformation of certain series occurring in aerodynamic interference calculations. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 452—457 (1949).

Da die bei aerodynamischen Rechnungen auftretende Doppelreihe

$$(1) \quad F(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^n [f_n(\alpha - m) - f_n(\beta - m)],$$

$$f_n(y) = y(y^2 + 2\mu^2 n^2)/n^2(y^2 + \mu^2 n^2)^{3/2}$$

(α, β reelle Parameter, μ positiver Parameter) sehr langsam konvergiert und auf direktem Wege schwer auszuwerten ist, obwohl W. S. Brown [Wind tunnel corrections on ground effect, Aeronaut. Research Committee, Rep. Mem. No. 1865 (1938)] eine Restabschätzung gegeben hatte, wendet Verf. die folgende Umformung an

$$(2) \quad F(\alpha, \beta) = \chi(\beta) - \chi(\alpha) \quad \text{mit} \quad (3) \quad \chi(x) = \pi^2 x/6 + \sum_{s=1}^{\infty} k_s \sin 2\pi s x$$

$$(4) \quad k_s = 8\pi\mu^2 s \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} K_0(2\pi\mu s n) + 4\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{K_1(2\pi\mu s n)\}/n,$$

wo $K_\nu(z)$ die modifizierte Besselfunktion bedeutet. Die Reihen (3), (4) konvergieren sehr schnell, außer wenn μ sehr klein ist. Die Herleitung der Identität (2) erfolgt auf dem Weg über das Komplexe, insbesondere mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes. Für einige praktisch wichtige Fälle werden die Koeffizienten der neuen Reihe (4) mitgeteilt. Ferner wird darauf hingewiesen, daß langsam konvergierende Reihen der allgemeineren Form $f_n(y) = \psi_n(y, \mu) (y^2 + \mu^2 n^2)^{-r+1/2}$ ($r > 0$ ganz, $\psi_n(y, \mu)$ ein Polynom in y) sowie der Gestalt $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \{g(\alpha - m) - g(\beta - m)\}$, $g(y) = \psi(y, \mu)/(y^2 + \mu^2)^{-(r+1/2)}$ ($\psi(y, \mu)$ ein Polynom in y) sich nach der gleichen Methode in schneller konvergierende Reihen überführen lassen.

Garten.

Reuter, G. E. H.: Note on the preceding paper. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 457—459 (1949).

Die Olversche Identität (s. vorsteh. Referat) gewinnt Verf. auf einem neuen Wege unter Benutzung der Poissonschen Formel.

Garten (Tübingen).

Vazsonyi, Andrew: On the aerodynamic design of axial-flow compressors and turbines. J. appl. Mech., New York **15**, 53—64 (1948).

Verf. entwickelt ein graphisches Verfahren zur Ermittlung der Strömung einer vollkommenen, reibungslosen und unzusammendrückbaren Flüssigkeit durch eine kaskadenförmige Anordnung von beliebigen Profilen. Er stützt sich dabei vor allem auf die mit Mitteln der konformen Abbildung und der Potentialtheorie erzielten Ergebnisse von R. A. Howell (Note on the theory of arbitrary airfoils in cascade, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, England, Note No. E. 3859, 1941). Die Bestimmung der beiden charakteristischen Kaskadenparameter (d. h. der Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in Richtung der Kaskadenachse auf der Rückseite der Profile jeweils beim Anblasen senkrecht oder parallel zur Achse) erfolgt aus mehreren Kurvenblättern. Sodann lassen sich aus einer Formelzusammenstellung der Druckanstieg, die Luftkräfte und der Ablenkungswinkel entnehmen.

Garten (Tübingen).

Rubinštejn, L. I.: Über ein hydrodynamisches Problem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 821—824 (1949) [Russisch].

L'A. cherche à construire l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible dans le domaine: $0 \leq x \leq a$; $-\infty \leq y \leq \infty$, $\zeta(x, y) \leq z \leq c$; les équations du mouvement sont linéarisées; le fluide est placé dans le champ de la pesanteur; on tient compte des forces de Coriolis dues à la rotation de la terre (tout en en négligeant certaines composantes); on admet qu'aucun des éléments du mouvement ne dépend de y ; à la surface libre, a priori inconnue: $z = \zeta(x, y)$ sont appliqués des efforts tangentiels d'intensité constante; $|\zeta|$ est petit: on rapportera, dès lors, à $z = 0$ les conditions frontières valables sur: $z = \zeta(x, y)$. Nous omettons d'explicitier toutes les autres conditions aux limites imposées à la solution. — Ce problème généralise ceux étudiés par Leibensohn (Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Sér. geograf, geofiz. 1940, Nr. 5); il se ramène à un système infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Ce système est régulier: de la, un théorème d'existence et d'unicité pour le problème posé.

J. Krávtchenko (Grenoble).

Supino, Giulio: Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 615—620 (1949)

Verf. beschäftigt sich mit der Frage nach der Möglichkeit wirbelfreier Bewegungen bei zähen Flüssigkeiten. Unter der Voraussetzung, daß zähe Flüssigkeiten an den Wänden haften, werden die folgenden drei Behauptungen bewiesen: 1. Eine zähe Flüssigkeit kann sich nicht wirbelfrei bewegen, wenn sie, zu einem noch so kleinen Teil, von einer festen oder in Translation befindlichen starren Wand begrenzt wird. 2. Im Fall starrer und zugleich bewegter Wände (und bei einer Schraubenbewegung oder wenigstens einfacher Drehbewegung) führt die Frage nach wirbelfreien Bewegungen auf überzählige und i. a. unverträgliche Bedingungen. Man kann zwar nicht behaupten, daß diese Bedingungen in allen Fällen unverträglich sind, da zwei wirbelfreie Bewegungen parallel zu einer festen Ebene tatsächlich angeführt werden, doch sind dies die einzig möglichen Fälle dieser Art in zwei Dimensionen. 3. Wird endlich die zähe Flüssigkeit nur von einer freien Oberfläche begrenzt, so gibt es keine wirbelfreien Bewegungen, wenn das von der Flüssigkeit erfüllte Gebiet einfach zusammenhängend und beschränkt ist, während im Fall eines Kanals keine wirbelfreie und permanente Wellenbewegung vorkommen kann.

Garten.

Holstein, H.: Über die äußere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen. Z. angew. Math. Mech. 30, 25—49 (1950).

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur mathematischen Vertiefung der Stabilitätstheorie der laminaren Reibungsschicht von W. Tollmien. Nachdem diese Theorie neuerdings durch experimentelle Untersuchungen von Schubauer und Skramstad in vorzüglicher Weise bestätigt worden ist, werden hier jetzt die bisher noch vorhanden gewesenen Unvollkommenheiten der älteren theoretischen Arbeiten beseitigt. Mathematisch handelt es sich um das Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung 4. Ordnung, der sog. Störungsdifferentialgleichung. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung wird durch zwei Paare von Näherungs-Partikular-Lösungen dargestellt. Dabei spielt die sog. kritische Schicht eine besondere Rolle, wo die Geschwindigkeit der Grundströmung übereinstimmt mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungsbewegung. Das eine Paar dieser Lösungen, welches rasch veränderlich ist, ist von den speziellen Daten der Laminarströmung unabhängig und nur in unmittelbarer Wandnähe wichtig („äußere Reibungsschicht“). Es läßt sich durch Besselsche und Hankelsche Funktionen darstellen und wird hier mit größerer Genauigkeit als bisher tabuliert. Die eine Lösung des anderen Lösungspaares weist, reibungslos gerechnet, in der kritischen Schicht eine Singularität auf, die durch eine „Reibungskorrektur“ („innere Reibungsschicht“) behoben werden muß. Diese Reibungskorrektur, die einen wichtigen Kernpunkt der ganzen Stabilitätstheorie

bildet, wird eingehender als bisher untersucht. — Im ganzen ergibt sich une bonne Übereinstimmung mit den bisherigen Arbeiten zur Stabilitätstheorie der Göttinger Schule, daß deren Ergebnisse nunmehr auch von der theoretischen Seite her völlig gesichert sind. — Zu einigen einschlägigen Arbeiten von Lin und Meksyn werden kritische Bemerkungen gemacht, durch die einige Irrtümer dieser Arbeiten aufgezeigt werden.

H. Schlichting (Braunschweig).

Loicjanskij, L. G.: Angenäherte Integrationsmethode der Gleichungen der laminaren Grenzschicht in einem inkompressiblen Gase. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva 13, 513—524 (1949) [Russisch].

$U(x)$ étant la vitesse, connue a priori, de l'écoulement à la frontière de la couche, les équations du mouvement plan peuvent être mises sous la forme

$$(1) \quad L(u, v) = \frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(U - u)] + U'(U - u) - v \frac{\partial^2 (U - u)}{\partial y^2} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

où u et v ont la signification habituelle. Remplaçons dans (1) v par sa valeur tirée de (2); on aura alors:

$$(3) \quad \int_0^{\delta(x)} L(u, v) y^k dy = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

où $\delta(x)$ est l'épaisseur de la couche au point d'abscisse x [cas limite: $\delta(x) = \infty$]. A noter que pour $k = 0$ et $k = 1$, (3) équivaut à des relations classiques. L'A. cherche alors n fonctions $\lambda_k(x)$ telles que la fonction: $u = u^0[x, y, \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)]$ vérifie les conditions frontières imposées à u et satisfasse à n premières relations (3). Si on admet que la théorie des moments s'applique à l'espèce (à noter qu'ici l'intervalle d'intégration a une limite variable, éventuellement infinie) et si le passage $n \rightarrow \infty$ est légitime, $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u^0$ fournit une solution du problème de la couche limite. Laissant de côté la justification rigoureuse de ces assertions, l'A. indique une méthode approchée pour le calcul explicite d'une solution. A cet effet, il fait un choix de paramètres qui fixent le mieux, selon lui, la forme des profils des vitesses et il les calcule numériquement au moyen des équations (3), dans le cas où le solide immergé est une plaque plane et où $\delta(x) = \infty$. La concordance des formules ainsi obtenues avec quelques solutions exactes connues paraît bonne. *Kravtchenko*.

Dolidze, D. E.: Nichtlineare Randwertaufgabe der instationären Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva 12, 165—180 (1949) [Russisch].

L'A. aborde le problème fondamental de l'hydrodynamique des fluides visqueux incompressibles, animés de mouvements non-permanents. — Soit D , un domaine tri-dimensionnel, simplement connexe, limité par une surface fixe F ; F admet en chacun de ses points un plan tangent et une courbure continus. Le problème revient à déterminer dans D le champs des vitesses $\vec{V}(x_1, x_2, x_3, t)$, régulier (c. a. d. admettant $\partial \vec{V} / \partial t$ et $\partial^2 \vec{V} / \partial x_i^2$ continus dans D), tel que: 1) \vec{V} soit solution du système de Navier et vérifie: $\text{div } \vec{V} = 0$. 2) \vec{V} soit connu sur F , à tout instant $t > 0$. 3) $\vec{V}(x_1, x_2, x_3, 0)$ soit une donnée (dans tout D). Des conditions supplémentaires sont à imposer à \vec{V} dans le cas du problème extérieur. — Un processus des approximations successives permet à l'A. de former la solution sous forme de séries procédant suivant les puissances de la densité ρ , absolument et uniformément convergentes pour $|t| < 1/9 \sqrt{\pi \rho} A \alpha$, où A est une constante dépendant seulement des conditions frontières, α une constante dépendant seulement de D . Ce résultat d'existence est complété ensuite par un théorème d'unicité. — Des conclusions analogues valent aussi pour le problème plan. — Les raisonnements se simplifient lorsqu'on linéarise partiellement les termes

d'inertie des équations de Navier au moyen du procédé d'Oseen. — La bibliographie de l'A. ne mentionne pas les travaux antérieurs d'Oseen et de Leray.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Kolmogorov, A. N.: Über die Zerstückelung von Tropfen in turbulenter Strömung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 825—828 (1949) [Russisch].

Baranaev, Teverovsky et Tregoubova [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 821—825 (1949)] publient une série de mesures intéressant le phénomène de fractionnement des gouttes du liquide, appelé „second“, placées dans le courant turbulent du „premier“ liquide, de même densité, mais de viscosité différente. — Ces expériences, faites avec soin, peuvent servir au contrôle de la théorie de la structure locale de la turbulence, due à l'A.; celui-ci discute à ce point de vue les conclusions de l'article précité — que nous désignerons par B. dans la suite et dont nous respecterons les notations. — Certaines mesures de B. ont été interprétées par les auteurs de ce travail comme incompatibles avec la formule asymptotique $f(k) \sim k^2$ (pour k petit) de l'A.; celui-ci refute cette assertion de B. — Ensuite, l'A. critique le schéma proposé dans B. pour rendre compte de l'évolution d'une veine mince du „second“ liquide, introduite dans le courant turbulent du „premier“, veine qui finit par se resoudre en gouttes de plus en plus fines. Il discute le rôle respectif des divers facteurs (différence des coefficients de viscosité de deux liquides, tension superficielle) en fonction du diamètre d de la goutte; il caractérise les paramètres qui gouvernent le phénomène et est ainsi conduit à donner une expression du diamètre d_0 des gouttes possédant une certaine stabilité dans le courant. — Les prévisions théoriques sont comparées aux résultats des mesures; l'A. insiste sur les inévitables incertitudes de ces interprétations. — A la fin, l'A. fixe le plan des recherches à entreprendre en énonçant quelques problèmes tant théoriques qu'expérimentaux.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Fajnzil'ber, A. M.: Wärmeverluste der Energie in Strömungen einer zähen Flüssigkeit bei großen Reynoldsschen Zahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 503—506 (1949) [Russisch].

L'A. introduit la fonction sans dimension $E_1 = 2\nu(\partial u/\partial y)^2/\bar{u}_k^3$ (ou \bar{u}_k est une constante convenable) qui donne la perte relative d'énergie dans un écoulement plan de fluide visqueux incompressible. Il indique ensuite les conditions que vérifie E_1 , qu'il détermine ensuite d'une manière approchée. L'A. déduit de là la loi de repartition des vitesses et, dans quelques cas particuliers, la loi des températures.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Fajnzil'ber, A. M.: Über die Zurückführung der Gleichungen eines zähen Gases auf Quadraturen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 57, 439—442 (1947) [Russisch].

La détermination de l'écoulement permanent, plan d'un gaz visqueux se ramène, au moyen d'un changement de variables et de fonction à l'intégration de l'équation

$$(1) \quad z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - m p (1 - y^2)^n \frac{\partial z}{\partial y} - p y (1 - y^2)^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

avec des conditions aux limites convenables. L'A. cherche des solutions de la forme: $z = A(x) B_n(y)$; A et B_n se déterminent au moyen de quadratures. L'A. signale un autre cas de réduction aux quadratures: c'est celui du domaine des grandes vitesses. — La même méthode s'applique aussi aux écoulements de révolution; mais alors le problème n'a été réduit aux quadratures que dans un cas particulier.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Prim, R. C.: A new superposition principle for steady gas flows. Quart. appl. Math. 7, 445—450 (1950).

H. Poritsky hat 1945 darauf hingewiesen, daß man aus ebenen Gasströmungen durch Hinzufügung einer konstanten Normalgeschwindigkeit räumliche Strömungen gewinnen kann, was ja unmittelbar aus dem Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzip folgt. Andererseits hat R. C. Prim (dies. Zbl. 33, 417) für Gase mit einer Zustandsgleichung der Form $\varrho = P(p)S(s)$ ein Substitutionsprinzip entwickelt, nach dem man aus einer bekannten Gasströmung sofort weitere, im allgemeinen nicht mehr rotationsfreie ableiten kann. Durch Verbindung beider Gedankengänge ergibt sich ein allgemeineres Substitutionsprinzip für räumliche Gasströmungen. Die so gewonnenen Beziehungen werden insbesondere auf „verallgemeinerte Beltrami-Strömungen“ angewandt, die dadurch ausgezeichnet sind, daß $\mathfrak{B} \times \text{rot } \mathfrak{B} = 0$,

wobei $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}/a$ der reduzierte Geschwindigkeitsvektor und a der maximal erreichbare Geschwindigkeitsbetrag (bei Expansion ins Vakuum) ist. *Wuest.*

Tomotika, S. and K. Tamada: Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. Part I. Quart. appl. Math. 7, 381—397 (1950).

Die bekannten mathematischen Schwierigkeiten bei der Lösung der gasdynamischen Grundgleichung für den Fall einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit im Inneren des Strömungsbereichs werden hier durch eine bemerkenswerte Approximation umgangen. Die Veränderliche

$$w = \int_1^q \frac{\varrho}{q} dq,$$

worin ϱ die Dichte des Gases, q den Betrag der Strömungsgeschwindigkeit bezeichnen — beide so normiert, daß sie dort, wo örtlich die Schallgeschwindigkeit erreicht wird, den Wert 1 annehmen —, ist in einem Bereich, in dem die Strömung, nicht stark von einer gleichförmigen Strömung abweichend, die Schallgeschwindigkeit durchschreitet, dem Betrage nach klein. Unter Beschränkung auf Strömungen dieser Art kann man daher in Potenzentwicklungen nach w höhere Potenzen vernachlässigen. Im Rahmen einer solchen Approximation gelangen die Verff. zu einer Differentialgleichung der Gestalt $(kw)_{\varphi\psi} = \{(kw)^2\}_{\varphi\varphi}$ als approximativ gültige Grundgleichung (anders gesagt: als exakte Gleichung für die Strömung eines hypothetischen Gases, dessen Verhalten in Nähe der Schallgeschwindigkeit gut mit dem des gegebenen Gases übereinstimmt); darin ist φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Stromfunktion, $k = (\gamma - 1)/2$, wo γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bedeutet. Für diese Differentialgleichung lassen sich eine ganze Reihe interessanter partikulärer Integrale angeben. Insbesondere werden ausführlich behandelt die Strömung durch eine Düse mit zwei Verengungen und die Strömung durch eine Laval-Düse. Im Falle der Laval-Düse interessiert die Frage nach der Möglichkeit eines Übergangs vom Taylorschen zum Meyerschen Strömungstypus. Diese Frage ist bisher für die strenge gasdynamische Grundgleichung mittels Doppelreihenentwicklung nach den kartesischen Koordinaten der Strömungsebene behandelt worden (Taylor, Görtler). Für ihr hypothetisches Gas mit der oben angegebenen Grundgleichung können die Verff. exakte Lösungen angeben. Allerdings bleibt die Gestalt der Düsenwände bei der Gesamtheit der von ihnen betrachteten Lösungen nicht exakt die gleiche. Immerhin erhärtet das Verhalten dieser Lösungen das bisherige Ergebnis anderweitiger Überlegungen, wonach ein kontinuierlicher und regulärer Übergang zwischen beiden Strömungstypen nicht möglich erscheint.

H. Görtler (Freiburg i. Br.).

Coburn, N.: Degenerate two-dimensional non-steady irrotational flows of a compressible gas. Quart. appl. Math. 7, 439—443 (1950).

Die Untersuchung bezieht sich auf einen Sonderfall von ebenen nichtstationären Überschallströmungen, bei dem das Charakteristikkennnetz unabhängig von der Zeit ist. Die Zeitabhängigkeit besteht daher nur darin, daß sowohl die beiden Geschwindigkeitskomponenten als auch die Schallgeschwindigkeit mit der gleichen Zeitfunktion $f(t)$ multipliziert sind, so daß beispielsweise $u = f(t)u(x, y)$. Die Funktion $f(t)$ ist jedoch nicht frei wählbar, sondern ergibt sich zu $f(t) = -1/(kt + b)$ mit den Konstanten k und b . Die Frage, wie solche Strömungen physikalisch zu verwirklichen sind, wird offen gelassen.

Wuest (Göttingen).

Galín, L. A.: Schlag auf einen festen Körper, der sich auf der Oberfläche einer kompressiblen Flüssigkeit befindet. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 547—550 (1947) [Russisch].

A l'instant initial, un solide S se trouve en contact, par une portion plane de sa frontière, avec la surface libre d'un fluide compressible élastique (dont seule la

constante λ de Lamé est supposée $\neq 0$). Le problème est à deux dimensions; le fluide occupe, à l'époque $t = 0$, le domaine $y \leq 0$. — A l'instant initial S subit une percussion verticale qui lui imprime un mouvement de translation vers le bas; la vitesse initiale est connue. — Après avoir ramené la question à un problème aux limites posé relativement à l'équation des ondes cylindriques, l'A. discute diverses éventualités (conservation ou cessation de contacts), donne l'état des vitesses, calcule la percussion.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Pillow, A. F.: The formation and growth of shock waves in the one-dimensional motion of a gas. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 558—586 (1949).

Vorliegende Arbeit behandelt die eindimensionale, nichtstationäre Gasströmung in einem unendlich langen Rohr, das am einen Ende durch einen beschleunigt bewegten Kolben verschlossen ist. In der x, t -Ebene grenzt die der Kolbenstellung zugeordnete Kurve das Strömungsfeld ab. In einem gewissen Anfangszustand treten Stoßwellen noch nicht auf, und das Strömungsfeld der x, t -Ebene wird von einer geradlinigen Charakteristik durch den Ursprung in eine ungestörte Zone und eine Zone stetiger Verdichtung geteilt. Bei beschleunigter Kolbenbewegung laufen die „positiven“ Charakteristiken jedoch zusammen und bilden schließlich eine Enveloppe. Die Spitze dieser Enveloppe, die berechnet werden kann, bildet den Ausgangspunkt einer Stoßwelle. Durch die Stoßwelle und die durch deren Anfangspunkt laufende Stromlinie wird das Strömungsfeld in zwei weitere Bereiche abgegrenzt, wobei in dem Bereich zwischen Stoßwelle und Stromlinie die Entropie veränderlich ist, während sie in allen übrigen Bereichen konstant ist. Für den mit konstanter Beschleunigung bewegten Kolben wird eine erste Näherung unter Vernachlässigung der Entropieänderung hinter dem Stoß berechnet. Auf dieser Grundlage wird dann eine zweite Näherung für die Entropie in der Nähe der Stoßlinie berechnet, und die Einführung einer „Riemannschen Funktion“ und die Befriedigung der Grenzbedingungen am Stoß führt zu einer Integralgleichung, deren Lösung die Lage der Stoßfront als Funktion der Zeit angibt. Die Lösung wird als Potenzreihe entwickelt und gilt für den Fall, daß der Stoß nicht zu stark ist. Wenn dem Kolben schließlich eine konstante Endgeschwindigkeit erteilt wird, läuft von der Stoßfront eine Welle zum Kolben zurück, wird dort reflektiert und holt unter Umständen den Stoß wieder ein, wobei die Geschwindigkeit der Stoßfront auf einen konstanten Endwert herabgesetzt wird.

Wuest (Göttingen).

Bryant, A. R.: The pressures exerted by an underwater explosion bubble on a disc-like baffle. Proc. phys. Soc. London 61, 341—351 (1948).

Eine kreisförmige, hohle Scheibe (also eine Art flacher Büchse von verschwindender Dicke als vereinfachtes Modell eines Unterwasser-„Ziels“) ist in eine Wassermenge von unbegrenzter Ausdehnung getaucht. Auf der Achse der Scheibe vom Radius C befindet sich im Abstand x_0 als Schallquelle eine schwingende Gasblase vom zeitabhängigen Radius $a(t)$. Die der Schallquelle zugekehrte Vorderseite der Scheibe sei deformierbar, die Rückseite dagegen vollkommen starr. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß durch Angabe der Durchbiegung z des Mittelpunkts der Vorderfläche deren Deformation vollständig bestimmt sei. — Sind die auftretenden Wellenlängen groß im Vergleich mit C , dann kann das Medium beim vorliegenden Beugungsproblem als inkompressibel angesehen werden. Es handelt sich damit um ein System mit 2 Freiheitsgraden, dessen Konfiguration durch die generalisierten Koordinaten $a(t)$ und $z(t)$ bestimmt ist. Das Geschwindigkeitspotential φ der Mediumströmung setzt sich additiv aus einem zu \dot{a} und einem zu \dot{z} proportionalen Anteil zusammen und kann in der Form geschrieben werden: $\varphi = a^2 \dot{a} \varphi_1 + \dot{z} \varphi_2$. Für $z(t)$ ergibt sich nach der Lagrangeschen Methode die Bewegungsgleichung

$$(1) \quad \ddot{z}(m + M) + kz = \sigma P \frac{d}{dt} (a^2 \dot{a}),$$

worin m die (auf die Ausbiegung z reduzierte) Masse der Vorderfläche der Scheibe, kz die durch die Deformation der Scheibe verursachte Rückstellkraft, σ die Dichte des Mediums, ferner

$$M = -\sigma \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds, \quad P = \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds$$

(Integrale über die Scheibenfläche zu erstrecken). M ist die Zusatzmasse, die infolge der Reaktion des Mediums bei einer Deformation der Scheibe in Erscheinung tritt. Die rechte Seite von (1) gibt den die Deformation bewirkenden Druck. — In den Koordinaten r, s des abgeplatteten Rotationsellipsoids ($r = \text{const.}$ Ellipsoide, $r = 0$ Zielscheibe, $s = \text{const.}$ dazu orthogonale Hyperboloide) werden die Potentialfunktionen φ_1 und φ_2 durch Reihenentwicklungen nach Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art dargestellt. Verf. zeigt, daß der Wert von φ_1 für $r = 0$ (physikalisch ist dies die Druckverteilung auf der starren Scheibe, hervorgerufen durch eine Quelle der Stärke 4π im Punkt $r = r_0, s = 1$) sich auf die geschlossene Form bringen läßt:

$$\varphi_1(r_0, 1) = \frac{1}{C \sqrt{r_0^2 - s^2 + 1}} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{r^2 - s^2 + 1}}{s} \right].$$

Dieses q_1 , durch das Potential dividiert, das bei gleicher Quelle und abwesender Scheibe vorhanden wäre, ist gleich dem Verhältnis der Drucke mit und ohne starre Scheibe. Für letzteres Verhältnis werden in Diagrammen und Tabellen numerische Werte gegeben. Ebenso für die Druckfunktion P und die Zusatzmasse M bei deformierbarer Scheibe, wobei mit der vereinfachten Annahme gerechnet wird, daß nur ein zentraler, kreisförmiger Teil der Scheibenvorderfläche beweglich ist, und zwar kolbenartig als starres Ganzes. *A. Schoch* (Göttingen).

Éfros, D. A.: Ähnlichkeit der Strömungen einer Flüssigkeit in einem porösen Medium. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 623—625 (1949) [Russisch].

L.A. developpe le théorie de la similitude mécanique pour les écoulements (ou filtrations) non-permanents de liquides incompressibles à travers les milieux poreux. Il indique les inégalités que doit vérifier la pression pour assurer la similitude globale et donne les lois pour les échelles des vitesses, des débits, et des temps. Des exemples numériques complètent l'exposé. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

● **Lewitt, E. H.:** *Hydraulics and the mechanics of fluids*. London: Sir Isaac Pimtan and Sons, Ltd., 1949. X, 630 p.; 21 s. net.

Silber, Robert: Sur le tracé des écoulements à surface libre. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1124—1126 (1949).

Unter Zugrundelegung dimensionsloser Veränderlicher für Tiefe y^* und sekundliche Wasserführung q^* eines Kanals entwirft Verf. ein Diagramm zur Ermittlung der freien Spiegelflächen, dessen „charakteristische Kurven“ für verschiedene Wasserführung untereinander affin sind. Diese sind durch die Gleichung $q^* = y^* \sqrt{1 - y^*}$ bestimmt und ergeben, entsprechend dicht verzeichnet, durch ihre Netzpunkte die erwünschten Zusammenhänge. — Dabei kann nicht nur die Spiegelkurve prismatischer Kanäle von rechteckigem Profil, sondern — durch Beachtung der Veränderlichkeit der Breite mit der Tiefe — auch solcher mit allgemeinerer Querschnittsfläche und schließlich auch nicht prismatischer Kanäle bestimmt werden. — Als „repräsentierende Charakteristik“ kann natürlich auch die durch den „pseudokritischen Punkt“, der für Rechtecksprofile bekanntlich durch die Beziehung $U = |g y|$ bestimmt ist, gewählt werden, wenn die Netzteilung auf sie entsprechenden Bezug nimmt. *Karas* (Darmstadt).

Wärmelehre:

Domb, C.: Statistical mechanics of some co-operative phenomena. Nature, London 163, 775—776 (1949).

Kurzer Bericht über die Weiterführung der Theorie von Kramers, Wannier und Onsager. Nach diesen kann man, unter Beschränkung auf ebene Gitter (Netze) und auf die Wechselwirkung zwischen unmittelbaren Nachbaratomen, die Zustandssumme pro Atom als höchsten Eigenwert A einer Matrix darstellen. Es wurde für A im Bereich tiefer Temperaturen eine Potenzreihe nach z ($z =$ Boltzmannfaktor der Wechselwirkungsenergie) angegeben, d. h. man untersuchte im Falle des Ferromagneten dessen Verhalten für verschwindendes Magnetfeld. Verf. gibt nun eine Potenzreihe für A nach zwei Variablen z und μ an:

$$A(\mu, z) = 1 + \mu z^4 + 2\mu^2 z^6 + \dots,$$

die für $\mu = 1$ in die frühere übergeht. Dabei charakterisiert die Variable μ das spezielle Problem. Beim Ferromagneten ist μ der Boltzmannfaktor der doppelten Energie eines Elementarmagneten im Feld, und es gilt $A(\mu, z) = \mu A(1/\mu, z)$. Im Falle der binären festen Lösung ist μ eine Funktion des Molenbruchs γ_1 der einen Komponente, und es gilt $\partial \log A / \partial \log \mu = \gamma_1$. Stetigkeitsuntersuchungen von A mittels der Potenzreihe einerseits und den eben genannten Funktionalgleichungen andererseits liefern Aussagen über Umwandlungstemperaturen (z. B. den Curiepunkt) und über die Art des Übergangs. So findet Verf. in Übereinstimmung mit Heisenberg, daß die spezifische Wärme des Ferromagneten am Curiepunkt bei nichtverschwindendem Feld stetig ist. Die binäre feste Lösung zerfällt unter-

halb einer Übergangstemperatur in zwei Phasen, deren eine eine (schwache) Lösung der ersten Komponente in der zweiten ist und deren andere eine (schwache) Lösung der zweiten Komponente in der ersten darstellt. Dabei existiert keine Umwandlungswärme, jedoch eine Unstetigkeit der spezifischen Wärme (Übergang 2. Ordnung).

G. U. Schubert (München).

Schlüter, Arnulf: Zur Statistik klassischer Gesamtheiten. *Z. Naturforsch.* **3a**, 350—360 (1948).

Verf. zeigt, daß unter der Voraussetzung der strengen Gültigkeit der Ergodenhypothese auch für kleine Teilchenzahlen einige zur statistischen Begründung der Thermodynamik benützte Voraussetzungen überflüssig sind. Die Phasendichte der Gesamtheit kann dann als das Faltungsprodukt der Phasendichten der Einzelteilchen gewonnen werden. Die vom Verf. durchgeführte Methode der Faltung kanonisch invarianter Phasendichten führt zur Definition von Größen, welche die thermodynamischen Differentialgleichungen exakt erfüllen, welche also für eine abgeschlossene Gesamtheit einen bestimmten Betrag haben und nicht statistisch schwanken. Verf. rechnet einige Beispiele durch.

Kofink (Stuttgart).

Einbinder, Harvey: Further deductions from the \mathfrak{N} -theorem. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., **II. S. 76**, 410—412 (1949).

Verf. zeigt mit Hilfe des Aleph-Theorems, daß ein scharfer physikalischer Unterschied zwischen entarteten und nichtentarteten Bose-Einstein-Gasen besteht; zu jeder gegebenen Dichte gehört eine Übergangstemperatur zwischen ihnen. Die entwickelte Methode wendet er auf das relativistische und nichtrelativistische, nichtentartete Quantengas und das entartete Fermi-Dirac-Gas an.

Kofink.

Polvani, G.: Il concetto di „traccia di una trasformazione“ e il secondo principio della termodinamica. *Rend. Sem. mat. fisico Milano* **18**, 140—173 (1948).

Born, Max: Le second principe de la thermodynamique déduit de la théorie des quanta. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **11**, 1—13 (1949).

Siehe dies. *Zbl.* **31**, 136.

J. Meixner (Aachen).

Prigogine, I.: Le domaine de validité de la thermodynamique des phénomènes irréversibles. *Physica, The Hague* **15**, 272—284 (1949).

Der Gültigkeitsbereich der Gibbs'schen Beziehung $TdS = dE + p dV - \sum \mu_i dx_i$ in Gasen, in denen irreversible Prozesse ablaufen, wird mit den Methoden der kinetischen Gastheorie von Enskog und Chapman untersucht. Er geht nicht über den Gültigkeitsbereich der zweiten Näherung von Enskog und Chapman hinaus, umfaßt aber immerhin noch recht extreme Verhältnisse hinsichtlich der Transporterscheinungen und schließt chemische Reaktionen ein, die langsam genug sind, um die Gleichgewichtsverteilung jedes Partners nicht wesentlich zu stören (vgl. auch dies. *Zbl.* **25**, 122; Ref.).

J. Meixner (Aachen).

Brodin, J.: Miscibilité des fluides et viriel des forces intermoléculaires. *Ann. Physique*, **XII. S. 4**, 422—524 (1949).

An Hand einer großen Anzahl graphischer Darstellungen des „Metavolumens“ eines binären flüssigen und gasförmigen Gemisches erläutert Verf. den Zusammenhang der Trennung eines Gemisches in 2 Phasen mit dem Verlauf der Kompressibilität, d. h. mit dem Abstandsgesetz der zwischenmolekularen Kräfte. Er diskutiert die Methoden der Thermodynamik der Flüssigkeiten, die experimentelle Bestimmung der thermodynamischen Funktionen der Gemische und die Abhängigkeit der Kompressibilität binärer Systeme von ihrer Zusammensetzung. Als spezielles Beispiel untersucht er das Methan-Propan-Gemisch. Schließlich erörtert er die Grenzen der Mischbarkeit bei verschiedenen Ansätzen für die zwischenmolekularen Kräfte.

Kofink (Stuttgart).

Rubinstein, L. I.: Über die Anfangsgeschwindigkeit der Fortpflanzung der Kristallisationsfront in dem eindimensionalen Problem von Stefan. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **n. S. 62**, 753—756 (1948) [Russisch].

Die Note handelt von der Ausbreitung der Kristallisationsfront in einem ursprünglich flüssigen Medium [eindimensionales Problem, vgl. J. Stefan, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa 98, 965—983 (1889)]. Bei der Bestimmung der anfänglichen Ausbreitungsgeschwindigkeit längs der Halbgeraden $x \geq 0$ mögen $u_1(x, t)$ und $u_2(x, t)$ die Temperaturen der festen bzw. flüssigen Phase sein. Die den Vorgang beschreibenden Gleichungen lauten dann:

$$(1.1) \quad u_{1xx} = u_{1t}, \quad 0 < x < y(t),$$

$$(1.2) \quad a^2 u_{2xx} = u_{2t}, \quad y(t) < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$(1.3) \quad u_1(0, t) = f_1(t) \leq 0, \quad u_i[y(t), t] = 0, \quad u_2(x, 0) = \varphi(x) \geq 0,$$

$$(1.4) \quad dy/dt = v_1(t) - v_2(t), \quad v_i(t) = u_{ix}[y(t), t], \quad y(0) = 0.$$

Verf. löst die Aufgabe unter der Annahme, daß $f(t)$ und $\varphi(x)$ stetige zweite Ableitungen besitzen, indem er mit dem Ansatz

$$\dot{f}(t) = -c_0 t^{m_0} + c_1 t^{m_1} [1 + f^*(t)], \quad \dot{\varphi}(x) = b_0 x^{n_0} + b_1 x^{n_1} [1 + \varphi^*(x)],$$

$$(1.5) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f^* = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi^* = 0, \quad c_0 > 0, \quad b_0 > 0, \quad m_0 > -1, \quad n_0 > -1, \quad m_1 > m_0, \quad n_1 > n_0,$$

in die beiden Integraldarstellungen der Lösungen der beiden Wärmeleitungsgleichungen (1.1) und (1.2) hineingeht. Ist $f(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$, so folgt

$$v_1(t) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{t}} [1 + v_1^*(t)], \quad v_2(t) = \frac{\beta_0}{\sqrt{t}} [1 + v_2^*(t)],$$

$$(3.1) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{t}} [1 + y^*(t)],$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_i^* = \lim_{t \rightarrow 0} y^* = 0, \quad y(t) = 2\gamma_0 \sqrt{t} [1 + y^{**}(t)],$$

wo sich die Konstanten α_0 , β_0 , γ_0 nach Einsetzen unter Berücksichtigung von (1.4) ergeben. Ist $\dot{f} \equiv 0$, $\dot{\varphi} \equiv 0$, so ist die Lösung durch (3.1) mit $v_i^* \equiv y^* \equiv 0$ gegeben. Dieses Ergebnis stimmt mit dem von J. Stefan überein. In ähnlicher Weise werden die Fälle $\varphi(0) = 0$, $f(0) \neq 0$ und $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 0$ behandelt; die mit $f(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq 0$ und $f(0) \neq 0$, $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ wurden von A. Huber [Z. angew. Math. Mech. 19, 1—21 (1939); dies. Zbl. 21, 173] untersucht. — Im zweiten Teil der Arbeit werden die Lösungen der beiden folgenden Randwertaufgaben erörtert: für $x = 0$ ist 1. der Wärmefluß, 2. die Ausstrahlung vorgegeben. Am Schluß wird eine notwendige Bedingung für das Eintreten der Kristallisation mitgeteilt. *Quade.*

Elektrodynamik:

Durand, Émile: Influence d'un champ quelconque sur une sphère ou sur un cylindre circulaire. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 188—190 (1950).

L'Autore determina l'induzione che un campo elettrico qualunque esercita su una sfera conduttrice o dielettrica; estende poi i risultati al cilindro circolare. La soluzione nel caso della sfera dielettrica non persuade perché il termine A non risulta, in generale, costante. Il problema della induzione magnetica in una sfera (identico dal punto di vista analitico a quello in discorso) è, del resto, già stato completamente risoluto fin dal 1906 da Boggio (C. r. Acad. Sci., Paris 142).

Graffi (Bologna).

Taub, A. H.: Orbits of charged particles in constant fields. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 786—798 (1948).

Es werden die relativistischen Bewegungsgleichungen eines Elektrons in einem räumlich und zeitlich konstanten Feld integriert. Verwendet wird die Matrizen-schreibweise. Für die Vierergeschwindigkeit ergibt sich $V = L(s) V_0$, wobei V_0 die Anfangsvierergeschwindigkeit bedeutet und $L(s)$ die Matrix

$$L(s) = \exp\left(\frac{e}{m_0 c^2} s F\right),$$

F die Matrix des Feldtensors f_v^μ . Eine eingehende Untersuchung der Matrix $L(s)$ führt den Verf. zu einer ausführlichen Diskussion und Klassifikation der Bahnen. Diese Methode ist auch auf die Bewegung eines Elektrons im Felde einer ebenen Welle anwendbar.

Rinow (Greifswald).

Schlomka, Teodor: Die elektrischen und magnetischen Flächenwirbel bei bewegten Körpern. Ann. Physik, VI. F. 5, 190—196 (1949).

Den Minkowskischen Gleichungen für bewegte Körper werden die Gleichungen für die Flächendivergenzen und Flächenwirbel an die Seite gestellt: (1) $n_{12}(\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1) = \varrho_{fl}$, (2) $n_{12}(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) = 0$, (3) $n_{12} \times (\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1) = (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) v_{n_{12}} + j_{fl}$, (4) $n_{12} \times (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) = -(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) v_{n_{12}}$. n_{12} ist die Normale der Begrenzungsfläche, $v_{n_{12}}$ die Normalkomponente ihrer Geschwindigkeit. ϱ_{fl} und j_{fl} sind die Flächenladungs- bzw. Flächenstromdichte. Es wird ferner noch die Gleichung für den Flächenwirbel des Feldvektors $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}$ abgeleitet.

Rinow (Greifswald).

Perkins, Granville A.: Non-radiating Maxwell waves. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1947 (1949).

Es werde $\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi$ und $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} - \text{grad } \Omega$ gesetzt. Verf. zeigt: Wenn die Permeabilität Null wird, also $\text{rot } \mathfrak{E} = \mathfrak{B} = 0$ ist, folgen aus $\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{E} + \mathfrak{B}$ die Gleichungen

$$\Delta \Phi = \text{div } \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \Delta \mathfrak{A} = -\mathfrak{B}.$$

Daraus ergeben sich strahlungsfreie Wellen von Φ und \mathfrak{A} . Die Rechnung gilt nur dort, wo der Viererstrom fehlt.

Bauer.

Cullen, A. L.: Channel section wave-guide radiator. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. S. 40, 417—428 (1949).

Es wird eine Mikrowellenantenne theoretisch behandelt, die aus einer rechteckigen Rinne besteht, und einem an einer (schmalen) Seite offenen rechteckigen Hohlleiter entspricht. Setzt man zwei Rinnen der Tiefe $b/2$ mit der offenen Seite (Höhe a) aneinander, so erhält man einen rechteckigen Hohlleiter von der Weite b , dessen Phasenkonstante annähernd mit der der Rinne übereinstimmt. Verf. setzt für die Phasenkonstante der Rinne (1) $h = 2\pi/\lambda_g = 2\pi\lambda^{-1} \sqrt{1 - (\lambda/2b')^2}$ (λ = Wellenlänge im freien Raum). Dies ist die Phasenkonstante für einen rechteckigen Hohlleiter der Weite b' . Es ist $b' = b + \delta$ und δ ist eine durch den offenen Rand der Rinne bedingte Korrektur. — Für das (elektrostatische) Randfeld der Rinne wird in komplexen Koordinaten ($z = x + iy$) folgender Ausdruck angegeben (V = Potentialdifferenz):

$$Z = \frac{a}{2\pi} \left[\exp \left(\frac{2\pi}{V} [u + jv] \right) + \frac{2\pi}{V} [u + jv] \right];$$

$v = \text{const.}$ gibt die Äquipotentiallinien, $u = \text{const.}$ die Feldlinien. Dieses Feld entspricht einer erhöhten Randkapazität, die dadurch in Rechnung gesetzt werden kann, daß man den beiden Wandungen der Rinne einen Streifen von der Breite $\delta = a\pi^{-1} [1 + \log_e (\pi b/a)]$ hinzugefügt denkt. Mit $b' = b + \delta$ ergibt sich aus (1) die Phasenkonstante. Das Experiment ergibt eine genügend genaue Bestätigung. — Die pro Längeneinheit der Rinne ausgestrahlte Leistung ist gegeben durch den reellen Teil der radialen Komponente des komplexen Poyntingschen Vektors, integriert über die Längeneinheit einer beliebigen zylindrischen Fläche, welche die Rinne umgibt. Es ist

$$\frac{dP_r}{dz} = \text{Re} \int_0^{2\pi} E_\varphi H_z^* r \, d\varphi;$$

dP_r ist die von der Länge dz der Rinne ausgestrahlte Leistung. Die Feldstärken der Zylinderwelle werden in folgender Form dargestellt:

$$E_\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \quad H_z = \frac{k^2 - h^2}{j \omega \mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \psi_n$$

worin $\psi_n = e^{-jn\varphi} H_n^{(2)}(\sqrt{k^2 - h^2} r) e^{-jh z}$. Diese Berechnung ergibt:

$$(2) \quad \frac{dP_r}{dz} = \frac{V^2}{4} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \left(\frac{k^2 - h^2}{k} \right)$$

Die Dämpfung der Welle in der Rinne ist durch Strahlungsverluste (α_r) und durch Leistungsverluste (α_m) bedingt. Demnach ist für den Dämpfungsfaktor zu setzen: $\alpha = \alpha_r + \alpha_m$. Für α_m kann man den Wert für einen rechteckigen Hohlleiter einsetzen: $\alpha_m = \frac{\pi \lambda_g}{\lambda^2} \left[\frac{1}{a} + \frac{\lambda^2}{2b^3} \right]$. Für

α_r folgt mit Hilfe der allgemeinen Beziehung: $\alpha = \frac{1}{2p} \frac{dP}{dz}$ unter Benutzung von (2) der Wert:

$\alpha_r = \frac{1}{4} \pi a \lambda_p / b^3$. Die Berechnung wird experimentell mit zufriedenstellender Genauigkeit bestätigt. — Auf die begrenzte Anwendbarkeit der Rinne als Antenne wird hingewiesen. *Lassen*.

Gans, Richard: Lecher-System in einer Schutzhülle. *Z. Naturforsch.* **3a**, 519—521 (1948).

Für die wechselseitige Kapazität der beiden Drähte eines Lechersystems in einem Schutzrohr wird ein Näherungsausdruck abgeleitet, der besser ist als ein früher von F. Breising (Theoretische Telegraphie, 2. Aufl., Braunschweig 1924, S. 68) angegebener. *Rinow* (Greifswald).

Papas, Charles H.: On the infinitely long cylindrical antenna. *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. **20**, 437—440 (1949).

Ein unendlich langer, vollkommen leitender kreiszylindrischer Antennendraht vom Radius a wird von einer EMK gespeist, die in irgendeinem im Endlichen gelegenen Querschnitt, an dessen Stelle der unendlich lange, zylindrische Leiter aufgeschnitten worden ist, als endliche Spannungsdifferenz zwischen den dicht gegenüberliegenden Querschnittsebenen wirkend zu denken ist. Die Beziehung für die in Richtung des Zylinders genommene Komponente des elektrischen Feldes, aus der die Ausdrücke für die radiale elektrische Feldstärke und die azimutale magnetische Feldstärke durch Differentiation gewonnen werden, läßt sich ohne Schwierigkeit berechnen. Sie stellt sich in Form eines Fourier-Integrals dar, in dem unter dem Integralzeichen der Quotient $H_0^{(1)}(w\rho)/H_0^{(1)}(wa)$ mit $\rho > a$ und $w = (k^2 - \zeta^2)^{1/2}$ vorkommt. ζ ist darin die Integrationsvariable. — Das Fernfeld einer derart gespeisten Antenne wird vom Verf. mittels der Sattelpunktmethode berechnet. An Hand des so gefundenen Näherungsausdrucks wird sowohl eine Beziehung für die reelle Komponente des Strahlungswiderstandes als auch eine Beziehung für den Strom in den weit entfernten Teilen des Antennenleiters aufgestellt. Die Formel für den Strahlungswiderstand gilt aber nur im Bereich großer Wellenlängen. — In älteren Aufsätzen der deutschen Literatur sind bereits mit den gleichen Hilfsmitteln ähnliche Rechnungen durchgeführt worden. *H. Buchholz* (Seeheim).

Tai, C. T.: Application of a variational principle to biconical antennas. *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. **20**, 1076—1084 (1949).

Es wird die Strahlungsimpedanz einer Doppelkegelantenne berechnet. Das sind Antennen für ultrakurze Wellen, die aus zwei metallisch leitenden, endlich langen Kegeln bestehen, die sich symmetrisch zur Kegelspitze einander gegenüberstehen. Geht die Erregung des Feldes von einem Dipol an der Kegelspitze aus, so sind bei Benutzung von Polarkoordinaten \mathcal{E}_θ , \mathcal{E}_r und \mathcal{H}_φ die einzigen von Null verschiedenen Feldkomponenten. Für die Herstellung der Lösung werden zwei Bereiche unterschieden, und zwar einmal der Bereich, der von der äußeren Manteloberfläche des Doppelkegels und der Kugelfläche durch die Endquerschnitte des Doppelkegels begrenzt wird. Der zweite Bereich besteht aus dem unbegrenzten Raum außerhalb der Kugel. Es werden dann zunächst in bekannter Weise für beide Raunteile nach der Methode der Partikularlösungen die entsprechenden Lösungsansätze gebildet. Die Forderungen von dem stetigen Durchgang der Tangentialkomponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} durch die Kugelfläche, die den oben beschriebenen beiden Bereichen gemeinsam ist, werden dazu benutzt, das Problem als eine Integralgleichung zu formulieren. Darin bildet die gesuchte Funktion unter dem Integralzeichen der Wert von \mathcal{E}_θ in der erwähnten Kugelfläche, der nur noch allein von ϑ abhängt. Von hier an wird dann die Lösung nach einer im wesentlichen von Schwinger ausgearbeiteten Methode gewonnen. Sie besteht in der Behandlung der Aufgabe als ein Variationsproblem. — Für kleine Kegelwinkel ergibt sich auf diese Weise dieselbe Lösung wie in einigen älteren Arbeiten. Es wird aber auch eine neue Näherungslösung erster Ordnung hergeleitet, die sich sowohl für kleine wie auch für große Kegelwinkel als gut brauchbar erwiesen haben soll. Außerdem wird noch

eine Methode besprochen, mittels der recht genaue Berechnungen der Eigenwerte und der Eigenfunktionen für einen gegebenen Kegel möglich sind. *H. Buchholz.*

Redheffer, R. M.: *Microwave antennas and dielectric surfaces.* J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 397—411 (1949).

Es wird der Einfluß einer dielektrischen Platte vor einer Mikrowellenantenne behandelt. Für eine Empfangsantenne ergibt sich die Empfangsleistung zu:

$$P = P_0 T^2 (1 - 2\varrho R \cos(4\pi d/\lambda) + \varrho^2 R^2)^{-1};$$

P_0 = Empfangsleistung ohne dielektrische Platte, T = Durchlässigkeitskoeffizient der Platte (bezogen auf die Amplitude), R = Reflexionskoeffizient der Platte (bezogen auf die Amplitude), ϱ = ein der Antenne zugeordneter Reflexionskoeffizient, d = Abstand der Platte. — Die Empfangsleistung ändert sich periodisch mit d , für genügend kleines ϱR nahezu sinusförmig mit der Periode $\lambda/2$. Messungen ergeben sehr gute Übereinstimmung. Aus ihnen läßt sich T bestimmen. Der Fall, daß die Platte mit der Achse des Systems einen schiefen Winkel bildet, wird ebenfalls diskutiert. — Für eine Sendeantenne ergibt sich von der Zuleitung aus gesehen ein Reflexionskoeffizient für die Antenne einschließlich der Platte:

$$\omega e^{i\omega'} = r e^{i r'} + \frac{R t \tau \exp [i (4\pi d/\lambda + t' + r' - \varrho')]}{1 - R \varrho e^{4\pi i d/\lambda}};$$

r ist der Reflexionskoeffizient der Antenne von der Leitung aus gesehen. Für eine angespannte Antenne ist $r = 0$; dann ist:

$$\omega = R t \tau (1 - 2\varrho R \cos(4\pi d/\lambda) + \varrho^2 R^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und es ergibt sich ähnlich wie oben eine nahezu sinusförmige Änderung mit der Periode $\lambda/2$, wie auch das Experiment bestätigt. Der Reflexionskoeffizient von dielektrischen Platten kann gemessen werden. Der allgemeine Fall, daß die Antenne nicht angepaßt ist, wird ebenfalls diskutiert. Die Reflexion an beliebigen zylindrischen Flächen, auch solchen mit welligen Oberflächen, und an Gittern, wird zusammen mit experimentellen Ergebnissen behandelt. *Lassen (Berlin).*

● **Barlow, H. M.:** *Microwaves and wave guides.* London: Constable & Co., 1947.

● **Bremmer, H.:** *Terrestrial radio waves. Theory of propagation.* Amsterdam: Elsevier Publishing Co. Inc. 1949. 343 p., 9—figs., 18,—Fl.

Courant, Ernest D.: *Current distribution in an ironless synchrotron magnetic field.* Studies Essays, pres. to R. Courant, 85—94 (1948).

Um die Stabilität der Bahnen der elektrischen Partikel in einem Synchrotron zu sichern, ist bekanntlich ein zusätzliches Magnetfeld erforderlich. Dieses Magnetfeld muß in einem ringförmigen Gebiet, welches die Bahnen enthält, gewisse Eigenschaften besitzen, die ebenfalls bekannt sind. Verf. denkt sich das Gebiet als begrenzt von einer Ringfläche mit elliptischem Querschnitt und zeigt, daß ein Magnetfeld der geforderten Art durch eine passende Stromverteilung auf der Ringfläche erzeugt werden kann, daß man also auf die sonst üblichen Eisenkerne verzichten kann. *Rinow (Greifswald).*

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Averbach, V. L. u. B. V. Medvedeb: *Zur Theorie der quantisierten Raum-Zeit.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 41—44 (1949) [Russisch].

Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Verallgemeinerung der Theorie von Snyder [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71, 38—41 (1947)], in der versucht wurde, das Raum-Zeit-Kontinuum durch eine quantisierte, diskrete Raum-Zeit zu ersetzen. Verf. leitet seine Verallgemeinerung aus den Bedingungen ab: 1. Das durch den metrischen Tensor im Impulsraum bestimmte Volumenelement ist hermitesch.

2. Impulskoordinaten und Lagekoordinaten haben Gruppeneigenschaften. 3. Die Operatoren der Lagekoordinaten sind homogen und erster Ordnung in bezug auf die ersten Ableitungen der Impulskoordinaten. Ferner werden das Problem der Darstellung der räumlichen Verschiebung und die Formulierung von Wellengleichungen diskutiert.

Gora (Rhode Island/Providence).

Bass, Jean: Lois de probabilité, équations hydrodynamiques et mécanique quantique. Rev. sci., Paris 86, 643—652 (1948).

L'A. compare les formalismes de la mécanique aléatoire et de la mécanique ondulatoire dans le cas général de la théorie des mélanges. La correspondance entre ces mécaniques est mise en évidence par l'intermédiaire d'une pseudo-densité de probabilité η , utilisée pour première fois par E. Wigner et jouant le rôle d'une densité de probabilité pour l'ensemble des variables aléatoires position-impulsion. Après avoir donné de l'existence et de l'unicité de cette fonction une démonstration simple et discuté ses rapports avec les véritables lois de probabilités quantiques, on montre que l'évolution dans le temps de η est déterminée par une équation fonctionnelle d'un type usuel en mécanique aléatoire et équivalente à l'équation de Schroedinger convenablement généralisée aux noyaux statistiques. Cette équation permet en mécanique quantique comme en mécanique aléatoire d'attacher aux systèmes une hydrodynamique de l'espace de configuration. Appliquées aux systèmes de points matériels de l'espace à trois dimensions, les équations hydrodynamiques obtenues sont équivalentes aux équations de la théorie des liquides de Born et Green.

Petiau (Paris).

Faure, Robert: Opérateurs du premier et du deuxième ordre. Rôle de l'hermiticité dans leur détermination. Hamiltonien dans le cas d'un champ électromagnétique. Intégrale première du premier ordre. Signification physique des grandeurs mesurables liées aux intégrales du premier ordre et du deuxième ordre. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 670—671 (1948).

Complétant les résultats d'une note précédente (ce Zbl. 33, 426) l'A. examine la correspondance entre les équations de la mécanique analytique et les opérateurs homologues en mécanique ondulatoire non relativiste. Il montre notamment qu'une intégrale première linéaire d'un problème de mécanique classique donne lieu à une intégrale première quantique dans le problème correspondant.

Petiau (Paris).

Feenberg, Eugene: A note on perturbation theory. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 206—208 (1948).

Sind $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ ein vollständiges System von Orthogonalfunktionen, so ist die Eigenfunktion $\psi = \sum_n a_n \psi_n$ des Hamiltonschen Operators H mit dem Eigenwert E durch das lineare homogene System

$$(E - H_{mn}) a_m = \sum_{m \neq n} H_{mn} a_n$$

bestimmt. Zur formalen Lösung durch successive Approximation ergibt sich nach L. Brillouin [J. Phys. Radium, III. S., 3, 373—389 (1932), dies. Zbl. 5, 329]

$$a_k = 1, a_m = [H_{mk}/(m)] + \sum_{n \neq k} [(H_{mn} H_{nk})/(m)(n)] + \dots,$$

$$E = H_{kk} + \sum_{m \neq k} [H_{km} H_{mk}/(m)] + \sum_{m, n \neq k} [(H_{km} H_{mn} H_{nk})/(m)(n)] + \dots, (m) = E - H_m.$$

Ein naheliegendes Iterationsverfahren, das mit $E^{(1)} = H_{kk}$ beginnt und die Relation

$$[1/(E^{(\mu)} - H_{mm})] = [1/(H_{kk} - H_{mm})] \times \sum_{\nu=0}^{\infty} [(H_{k\ell} - E^{(\mu)})/(H_{k\ell} - H_{mm})]^\nu$$

benutzt, verwandelt Brillouins Gleichungen in eine explizite Formel für E , äquivalent zu Schrödingers Störungsformel bei Entwicklung aller Eigenfunktionen und Eigenwerte in Potenzreihen nach einem Entwicklungsparameter. Auf

diese Weise erscheint die Störungstheorie in Form einer impliziten Gleichung für den Eigenwert und einer expliziten Gleichung (in welche der Eigenwert eingeht) für die Amplituden. Mangelnde Konvergenzsicherung und logische Widersprüche gelegentlich mancher Anwendungen dieser Methode veranlassen Verf. zu einer Transformation der Brillouinschen Gleichungen in eine halbexplizite Form mit größerem Gültigkeitsbereich als dem des erwähnten Iterationsverfahrens. Dabei wird eine algebraische Identität benutzt. *M. Pini (Dacca).*

Carter, D. S. and G. M. Volkoff: The quantum mechanical problem of a particle in two adjacent potential minima. I. Direct solution. *Amer. J. Physics* **17**, 187—196 (1949).

Carter, D. S. and G. M. Volkoff: The quantum-mechanical problem of a particle in two adjacent potential minima. II. Solution by perturbation theory methods. *Amer. J. Physics* **17**, 303—310 (1949).

Verf. behandeln nach pädagogischen Gesichtspunkten ein Beispiel zur Störungstheorie und führen den Vergleich mit der exakten Lösung durch. Sie wählen den eindimensionalen Fall zweier nicht notwendig gleicher, rechteckiger Potentialtöpfe und nehmen einmal die Tiefe des einen Topfes und einmal die Durchlässigkeit der Potentialschwelle zwischen den Töpfen als klein an. Anwendung auf das Inversionsspektrum des Ammoniaks. *Höhler (Berlin).*

Firsov, O. B.: Zur Theorie der Streuung in zentralsymmetrischem Feld. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **68**, 241—244 (1949) [Russisch].

Verf. diskutiert die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für Streuung im zentralsymmetrischen Feld und gibt Gültigkeitsbedingungen für die Bornsche Näherung an. Es wird ferner gezeigt, wie die erhaltenen Beziehungen abzuändern sind, wenn man sie auf gebundene Teilchen verallgemeinern will. *Gora (Rhode Island).*

Pierucci, Mariano: Una deduzione immediata dell'equazione di Schrödinger da quella di D'Alembert. *Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena* **1**, 119—120 (1947).

Pierucci, Mariano: L'energia relativistica legata alla massa di un protone o di un neutrone „in riposo“ considerata come energia cinetica di un gas elettronico o fotonico. *Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena* **2**, 69—72 (1948).

Spekulationen darüber, daß die Ruhenergie eines Protons oder eines Neutrons sich nach der Einsteinschen Energie-Masse-Relation aus der kinetischen Energie eines „Sub“-Gases von Elektronen aufbauen soll. *Volz (Erlangen).*

Pierucci, Mariano: Previsione teorica di un nuovo fenomeno di assorbimento: Spettri di assorbimento di raggi corpuscolari. *Atti. Sem. mat. fis. Univ., Modena* **2**, 73—74 (1948).

Es wird der Gedanke geäußert, daß Strahlenquellen für korpuskulare Strahlen (beispielsweise die Kathode einer Röntgenröhre) genau solche elektromagnetischen Strahlen absorbieren, deren Wellenlänge der „De Broglie“-Welle der emittierten Teilchen entspricht. *Volz (Erlangen).*

Sokolov, A.: Quantentheorie eines „leuchtenden“ Elektrons. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **67**, 1013—1016 (1949) [Russisch].

Die elektromagnetische Strahlung eines auf nahezu kreisförmiger Bahn umlaufenden Elektrons wird quantentheoretisch berechnet. Merkliche Abweichungen von dem nach der klassischen Theorie gewonnenen Resultat sind zuerst zu erwarten, wenn die Energie des Elektrons eine kritische Energie $E_0 = mc^2 (mca/\hbar)^{1/5}$ (a Radius der Kreisbahn) überschreitet. Für $a \sim 10$ cm ist $E_0 \sim 10$ MeV. *Gora.*

Broglie, Louis de: Sur une forme nouvelle de l'interaction entre les charges électriques et le champ électromagnétique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **229**, 157—161 (1949).

Verf. untersucht eine lorentzinvariante Abänderung der Maxwell'schen Theorie, die zu einer endlichen Coulombselbstenergie für Punktladungen führt. Das Feld stellt sich als Differenz zwischen dem üblichen und einem vektoriellen Yukawafeld

dar. Die Resultate sind identisch mit den u. a. von Bopp (dies. Zbl. 24, 143) und Podolsky-Schwed [Rev. modern Physics 20, 40 (1948)] gegebenen Formulierungen. *Lehmann (Jena).*

Broglie, Louis de: *Nouvelles remarques sur l'interaction entre une charge électrique et le champ électromagnétique.* C. r. Acad. Sci., Paris 229, 269—271 (1949).

Verf. gibt eine neue Herleitung früherer Ergebnisse (s. vorsteh. Referat), die auf seiner Wellenmechanik des Photons basiert (vgl. dies. Zbl. 33, 94). *Lehmann.*

Broglie, Louis de: *Sur la théorie du champ soustractif.* C. r. Acad. Sci., Paris 229, 401—404 (1949).

Es wird eine Reinterpretation des früher (s. vorsteh. Referate) vom Verf. betrachteten Ansatzes für die Wechselwirkung zwischen Elektron und elektromagnetischem Feld vorgenommen. Weiterhin gibt Verf. an, daß die virtuellen Übergängen entsprechenden Matrixelemente sich von denen der üblichen Theorie um einen lorentzinvarianten Faktor unterscheiden. *Lehmann (Jena).*

Terletzkij, Ja. P.: Die „Ruhmasse“ einer elektromagnetischen Strahlung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 63, 519—522 (1948) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß der Ausdruck $P^2 - E^2/c^2$ nur für ebene, aber nicht allgemein für beliebige elektromagnetische Wellen verschwindet. Im letzteren Fall ist es konsequent, der Wellengruppe eine Ruhmasse zuzuschreiben. Eine Abschätzung der Größenordnung dieser Ruhmasse wird für den Fall einer nahezu monochromatischen und nahezu ebenen, durch ein Rechteck begrenzten Welle gegeben. Solange die Längenmaße dieses Rechtecks gegenüber der Wellenlänge klein sind, ist diese Ruhmasse vernachlässigbar. *Gora (Rhode Island/Providence).*

Jost, Res and Jerzy Rayski: Remarks on the problem of the vacuum polarization and the photon-self-energy. Helvetica physica Acta 22, 457—466 (1949).

In der Schwingerschen Formulierung der Quantenelektrodynamik (dies. Zbl. 33, 234) stellen die Ausdrücke für die Polarisation des Vakuums und die Selbstenergie des Photons mathematisch unbestimmte Ausdrücke dar. Um die Eichinvarianz und damit das Verschwinden der Photonselbstenergie zu gewährleisten, untersuchen Verff. eine Regularisierung dieser Ausdrücke von einem „realistischen“ Standpunkt aus [Pauli-Villars, Rev. modern Physics 21, 434 (1949)], indem sie an ein elektromagnetisches Feld neben dem eigentlichen Elektron-Positronfeld geladene skalare bzw. pseudoskalare und ev. weitere spinorielle Hilfsfelder ankoppeln. Insgesamt sollen n Spinorfelder mit Massen m_i und N skalare Felder mit Massen M_i wirksam sein. Eichinvarianz und Verschwinden der Photonselbstenergie wird erreicht, wenn $N = 2n$ und $\sum_{i=1}^N M_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n m_i^2$. Der divergente Term der Vakuumpolarisation (Renormierung der Ladung) wird durch dieses Verfahren jedoch nicht beeinflusst. *Lehmann (Jena).*

Watson, K. M. and J. V. Lapore: Radiative corrections to nuclear forces in the pseudoscalar meson theory. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1157—1163 (1949).

Die Feynman-Dysonsche Fassung der Schwinger-Tomonagaschen Renormalisierungstheorie wird auf die Berechnung der vierten Näherung zur nuclearen Wechselwirkung angewendet. Die Rechnung wird für die pseudoskalare geladene und ladungs-symmetrische Mesontheorie mit pseudoskalarer Wechselwirkung durchgeführt. Die auftretenden Divergenzen lassen sich als Massenrenormalisierung (für Nukleonen und Mesonen) und als Renormalisierung der Wechselwirkungskonstante erkennen. Die Wechselwirkungspotentiale, die sich nach Subtraktion der Divergenzen ergeben, beschreiben spin-unabhängige Kräfte. Sie verhalten sich für nicht-relativistische Nukleonen wie $1/r^3$. Diese Singularität wird jedoch durch relativistische Effekte auf $1/r$ reduziert. Das durch die relativistische Korrektur verbesserte

Nukleon-Potential ist in Widerspruch mit der Erfahrung. An Hand des Neutron-Proton-Streuproblems für 90 MeV Primärenergie wird gezeigt, daß die relativistischen Korrekturen nicht klein sind. *Touschek* (Glasgow).

Géhéniau, J. et F. Villars: La self-énergie de l'électron dans un champ électromagnétique extérieur. *Helvetica phys. Acta*, Basel **23**, 178—186 (1950).

Es wird die Selbstenergie des Elektrons in einem konstanten elektromagnetischen Feld berechnet. Dazu kann man die von Schwinger (dies. Zbl.) benutzten Funktionen $\bar{S}(x-x')$ und $S^{(1)}(x-x')$ entsprechend dem Auftreten eines konstanten äußeren Feldes verallgemeinern. So wird

$$\bar{\Delta}(x, x') = \left\{ \bar{\Delta}(\lambda) - \frac{\partial \bar{\Delta}(\lambda)}{\partial \kappa_0^2} e^{\frac{1}{2}} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \exp \left(i e \int_{x'}^x A_\nu(x'') dx'' \right)$$

und

$$\tilde{S}(x, x') = \left\{ \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i e A_\mu \right) - \kappa_0 \right\} \bar{\Delta}(x, x'); \quad \lambda = (x'_\mu - x_\mu)^2.$$

Analoges gilt für $S^{(1)}(x, x')$. Diese Funktionen werden in den Feldgrößen bis zur 1. Ordnung bestimmt und in die Schwingersche Formel für die Selbstenergiedichte

$$- \frac{e^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4\xi \{ \bar{\psi}(x+\xi) \gamma_\nu [\bar{D}(\lambda) S^{(1)}(x+\xi, x) + D^{(1)}(\lambda) \tilde{S}(x+\xi, x)] \gamma_\nu \psi(x) \\ + \text{kompl. konj.} \}$$

eingesetzt. Der hierbei neu hinzutretende und in $F_{\mu\nu}$ lineare Term

$$- \frac{e}{4\kappa_0} \frac{e^2}{4\pi^2} \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi(x)$$

ist die Energiedichte der Wechselwirkung des Elektrons mit dem äußeren Feld auf

Grund der Anomalie $\delta\mu = - \frac{\partial E_{\text{self}}}{\partial H_{\text{ext}}} \Big|_{H=0}$ des magnetischen Momentes. Das Er-

gebnis stimmt mit dem von Schwinger und Luttinger überein. Irgendein Term, der eine Ladungsrenormalisierung nötig machte, erscheint hier nicht. Dies stützt die Annahme, daß nur die Polarisierung des Vakuums zu einer Renormalisierung der Ladung Anlaß gibt. Die Methode wird noch verallgemeinert für den Fall des Protons im pseudoskalaren Mesonenfeld und führt hier zu einem mit den Resultaten von Luttinger und Case übereinstimmenden Ergebnis. *Oehme* (Göttingen).

Schlögl, Friedrich: Der (e, n) -Prozess am Deuteron. *Z. Naturforsch.* **4a**, 664—671 (1949).

Der Wirkungsquerschnitt für den (e, n) -Prozeß für das Deuteron — das ist für die Aufspaltung des Deuteriums unter Elektronenbeschuß — wird in Bornscher Näherung berechnet. Da die Protonen durch skalare Wellenfunktionen beschrieben werden, werden die magnetischen Spineffekte vernachlässigt. *Touschek*.

Sextl, Theodor: Beitrag zur Theorie des Kernphotoeffekts. *Acta physica Austriaca* **3**, 277—282 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Berechnung der Wirkungsquerschnitte des Kernphotoeffekts beim Deuteron und des Einfangprozesses eines Neutrons durch ein Proton wird die Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für den Kernphotoeffekt bei ${}^3_2\text{He}$, ${}^9_4\text{Be}$ und ${}^{13}_6\text{C}$ als Einkörperproblem streng durchgeführt. Dabei wird das erforderliche Matrixelement des elektrischen Dipolmoments unter Benutzung derjenigen Eigenfunktion berechnet, die man unter der Voraussetzung des einfachen Muldenpotentials bestimmt. Die charakteristischen Muldenparameter (r_0 , V_0) gehen in die Formel für die Wirkungsquerschnitte explizit ein und lassen eine experimentelle Bestimmung dieser Konstanten durch Messungen bei variierender γ -Energie, insbesondere bei ${}^9_4\text{Be}$, möglich erscheinen. *Ecker* (Bonn).

Bau der Materie:

• **Laue, M. von:** *Materiewellen und ihre Interferenzen.* (Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen, Band 7.) — 2. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G., 1948. VIII, 392 S.

MacDonald, A. D. and Sanborn C. Brown: *High frequency gas discharge breakdown in hydrogen.* *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76,* 1634—1639 (1949).

Zur Berechnung der Feldstärke für den Zusammenbruch einer Gasentladung in Wasserstoff geht die Arbeit von der Boltzmannschen Fundamentalgleichung aus. Unter Berücksichtigung unelastischer Zusammenstöße läßt sich die Energieverteilungsfunktion der Elektronen mit Hilfe der Lösungen der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung ausdrücken. Der Ionisierungsgrad und der Diffusionskoeffizient werden mit Hilfe dieser Lösungen und der kinetischen Theorie berechnet. Aus diesen Daten und der Diffusionsgleichung ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die Durchbruchfeldstärke. Die Aussagen der Theorie werden mit Experimenten verglichen. Innerhalb der Fehlergrenzen, die durch die mangelhafte Kenntnis des Stoßwirkungsquerschnitts bestimmt sind, liefert die Theorie für einen großen Druck- und Frequenzbereich gute Resultate. *Ecker (Bonn).*

• **Sauter, Fritz:** *Über die Zustandsgleichung verdünnter realer Gase.* *Ann. Physik, VI. F. 6,* 59—66 (1949).

Es wird elementar gezeigt, daß nur die von Boltzmann angegebene Methode zur Berechnung der Volumenkorrektur des van der Waalsschen Gases zulässig ist, nach der diese Korrektur auf einer Erhöhung der Gasdichte in Wandnähe wegen der endlichen Größe der Gasmoleküle beruht. In analoger Weise läßt sich auch die Druckkorrektur infolge der van der Waals-Kräfte zwischen den Gasmolekülen quantitativ ermitteln; nimmt man auch noch Fernkräfte zwischen Gasmolekülen und Gefäßwand an, so läßt sich ebenfalls elementar zeigen, daß der Gasdruck von einer solchen Wechselwirkung nicht beeinflusst wird. *J. Meixner (Aachen).*

Kohler, Max: *Wärmeleitung der Metalle im starken Magnetfeld.* *Ann. Physik, VI. F. 5,* 181—189 (1949).

Die Fundamentalgleichung der Elektronentheorie der Metalle wird unter Vernachlässigung der Stöße der Elektronen mit dem Gitter für extrem starke transversale Magnetfelder untersucht, und die Wärmeleitfähigkeit ein- und zuewertiger Metalle wird berechnet. Bemerkungen zur Thermokraft, zum Verhältnis von Hall- und Righi-Leduc-Koeffizienten und zur experimentellen Bestimmung der Gitterleitfähigkeit. *J. Meixner (Aachen).*

Kohler, Max: *Allgemeine Theorie der Abweichungen von der Mathiessenschen Regel.* *Z. Physik 126,* 495—506 (1949).

Der Widerstand eines Metalls wird in der Form

$$\varrho = \varrho_{\text{ideal}} + \varrho_{\text{Rest}} + \Delta$$

dargestellt, wobei ϱ_{Rest} als temperaturunabhängig eingeführt und für den Zusatzwiderstand Δ , der von den thermischen und statischen Gitterstörungen herrührt, eine 2-konstantige Näherungsformel aufgestellt wird. Δ wird im Temperaturgebiet, wo $\varrho_{\text{ideal}} \ll \varrho_{\text{Rest}}$, klein gegen ϱ_{Rest} , im anderen Grenzfall u. U. größer als ϱ_{Rest} , immer aber positiv, wenn wie hier durch die 2 ersten Glieder gleichzeitig 2 Stoßmechanismen wirksam sind. — Der Zusatzwiderstand Δ ist verantwortlich für die Abweichungen von der Mathiessenschen Regel und führt beispielsweise zur Deutung des experimentellen Befunds, daß die Lage des Minimums des Widerstandes von Gold in Abhängigkeit von der Temperatur vom Reinheitsgrad abhängt, daß sich also nicht einfach die Kurve in der Vertikalen verschiebt. *Volz (Erlangen).*

Matyáš, Zdeněk: *Theory of influence of order-disorder transformations on the electrical resistivity in alloys.* *Časopis Mat. Fysiky, Praha 72,* 79—94 und tschechische Zusammenfassung. 94—95 (1947).

Es wird der elektrische Widerstand eines Cu_3Al -Kristalls in Abhängigkeit vom Bragg-Williamsschen Fehlordnungsgrad untersucht. Dazu wird zunächst der Beitrag einer Fehlstelle (Cu-Au -Vertauschung) zur Streuung einer ebenen Elektronenwelle in Bornscher Näherung berechnet, indem die Fehlstelle durch ein passendes Störpotential dargestellt wird. Die beiden Grenzfälle, nahezu vollkommene Ordnung und nahezu vollständige Fehlordnung, werden dann durch eine einfache Interpolationsformel, die den Bragg-Williamsschen Fehlordnungsparameter linear enthält, verbunden und jeweils der zugehörige elektrische Widerstand berechnet. Nach Einsetzung der anderweitig bekannten physikalischen Parameter erhält man quantitative Übereinstimmung mit den experimentellen Werten des el. Widerstands in Abhängigkeit von der Temperatur, ohne daß noch eine besondere Anpassung der Endformel nötig wäre.

Volz (Erlangen).

Broch, Einar Klaumann: On the vibration spectrum of polar cubic crystal lattices. Arch. Math. Naturv., Oslo 49, Nr. 2, 19—33 (1947).

M. Born und J. H. C. Thompson haben 2 Arbeiten [Proc. R. Soc., London, A, 147, 594—599 (1934) und 149, 487—505 (1935); dies. Zbl. 10, 431] dem Eigenschwingungsspektrum eines Ionengitters gewidmet. Verf. setzt sich zum Ziel, bei einem kubischen Kristallgitter dieser Art eine einfache Methode zur rechnerischen Auswertung dieses Schwingungsspektrums anzugeben. Zu diesem Zweck setzt er zunächst allgemeine Zentralkräfte zwischen den Partikeln des Gitters voraus. — Da für die Berechnung der Abstoßungskräfte entsprechend einem ziemlich hohen Exponenten der Kraftfunktion die auftretende Fouriersche Reihe ebenso wie die benötigten 2. Ableitungen rasch konvergieren, stellt er ihre Behandlung — ähnlich wie Thompson, a. a. O. S. 491 — zurück bis zur Diskussion der einzelnen Kristalle. Ausführlich beschäftigt sich Verf. mit den Schwierigkeiten, die bei Coulombschen Kräften hinsichtlich der Konvergenz der unendlichen Reihen auftreten. Mit Hilfe Epsteinscher Zetafunktionen [P. Epstein, Math. Ann., Berlin 56, 615—644 (1903)] gibt Verf. eine Darstellung der Gitterpotentiale, wie sie bereits in einer Arbeit des Ref. [Physik. Z. 24, 73—80 und 97—104 (1923)] enthalten ist, wenn man in letzterer die Dimensionszahl $p = 3$, die Integraltrennstelle $\omega = 1$ und als quadratische Form die Kugelform $\varphi = \delta$, einsetzt. Dort wird das Gitterpotential für beliebige Lage des Aufpunkts im unendlichen Gitter unmittelbar durch eine Epsteinsche Zetafunktion ausgedrückt, wie auch Verf. sie benötigt. Einige Druckfehler wird der mathematische Leser sofort erkennen, so auch 2 im Eulerschen Integral (7-12). In Formel (7-21), die sich auf die Unstetigkeit der Epsteinschen Zetafunktionen in den unteren Parametern bezieht, wenn diese sämtlich verschwinden, muß die additive Konstante 1 gestrichen werden. [Vgl. die Grenzformeln, Ref. a. a. O. S. 78 (21a) und S. 99 (6).] — Eine weitere Veröffentlichung mit Diskussion der Ergebnisse stellt Verf. in Aussicht.

Emersleben (Berlin).

Wasastjerna, Jarl A.: On the theory of the heat of formation of solid solutions. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 15, Nr. 3, 13 S.

Die Bildungsenergie eines Mischkristalls KCl-KBr wird unter verschiedenen Annahmen berechnet: a) Wenn alle Ionen die ungestörten Plätze eines kubisch-flächenzentrierten Gitters einnehmen. In diesem Fall wird die Bildungsenergie von der lokalen Anordnung unabhängig, es stellt sich also kein bestimmter Ordnungszustand ein. b) Wenn im Falle vollständiger Unordnung die Verschiebung der Ionen berücksichtigt wird. c) Wenn außer der Annahme b) das Gitter durch einen gewissen Grad lokaler Ordnung charakterisiert wird, der die Verteilungsfunktion zu einem Maximum macht. — Es wird gezeigt, daß die Annahmen a) und b) zu falschen Ergebnissen bezüglich der Bildungswärme in Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis führen, daß man aber mit Annahme c) zu befriedigender Übereinstimmung mit den experimentellen Daten kommt.

Volz (Erlangen).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

• **Waldmeier, M.:** Einführung in die Astrophysik. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften 18, Astronomisch-Geophysikalische Reihe, Bd. III.). Basel: Verlag Birkhäuser 1948. 381 p. SFR. 47.50.

M. Waldmeiers Buch gibt eine zusammenfassende, lehrbuchartige Darstellung der theoretischen Grundlagen der Astrophysik. (Beiseite gelassen ist also die ganze „klassische“, d. h. Positionsastronomie; auch auf Fragen der Beobachtungstechnik wird nicht eingegangen.) Verfgliedert den umfangreichen Stoff in fünf Teile. Der erste stellt einiges Handwerkzeug bereit; Strahlungstheorie, eine kurze Übersicht über die Zustandsgrößen der Sterne, Atombau und Spektroskopie, Ionisationstheorie und Einiges über Örter und Bewegungen der Sterne. Der 2. Teil behandelt den inneren Aufbau der Sterne, wobei neben der Eddingtonschen Theorie auch weiße Zwergsterne, pulsierende Gaskugeln und das Problem der Energieerzeugung zur Sprache kommen. Der 3. Teil bringt Strahlungsgleichgewicht und Aufbau der Sternatmosphären sowie die Deutung ihrer kontinuierlichen Spektren und der Fraunhoferlinien. Teil 4 behandelt die Sternsysteme, d. h. zunächst Doppelsterne, Sternhaufen und das galaktische System. Dann folgt eine Einführung in Kinematik und Dynamik des Sternsystems und zum Schluß ein Abschnitt über außergalaktische Sternsysteme. Der 5. Teil ist den immer wichtiger werdenden Problemen der interstellaren Materie gewidmet: Interstellarer Rauch, Emissionsnebel und interstellares Gas werden vom physikalischen und astronomischen Standpunkt aus behandelt. — Durch eine oft ziemlich konzentrierte Darstellungsweise konnte der Umfang des Buches erfreulich handlich gestaltet werden. Es wird im akademischen Unterricht sicher einen wichtigen Platz einnehmen.
A. Unsöld (Kiel).

Mineur, Henri: Étude théorique des accélérations stellaires. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 512—513 (1950).

Enthält einige theoretische Bemerkungen und numerische Abschätzungen im Anschluß an einige Arbeiten von P. van de Kamp über das Problem der Beschleunigungen in der Fixsternbewegung. K. Stumpff (Vogelsang ü. Seesen).

Öpik, E. J.: Stellar models with variable composition. I. Models with a discontinuity of molecular weight. Proc. Irish Acad. A 53, 1—16 (1949).

Infolge der Kernumwandlungen und der damit verbundenen Abnahme des Wasserstoffgehaltes in dem zentralen Teil eines Sternes nimmt in diesem Gebiet das mittlere Molekulargewicht der Sternmaterie langsam, aber stetig mit der Zeit zu. Denn auch die geringfügige durchmischende Wirkung der in rotierenden Sternen stets auftretenden schwachen Strömungen ist zu vernachlässigen. Es wird deshalb im allgemeinen das mittlere Molekulargewicht der Sternmaterie in dem zentralen Gebiet eines Sternes größer sein als in seinen äußeren Teilen. Verf. untersucht nun Sternmodelle, bei denen das mittlere Molekulargewicht an der Trennungsfläche zwischen dem konvektiven zentralen Gebiet (in dem in erster Linie die Kernumwandlungen stattfinden) und der nach außen hin anschließenden, im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Zone diskontinuierlich abnimmt. Vogt (Heidelberg).

Pecker, Jean-Claude: Sur le calcul théorique de l'intensité des raies dans les spectres stellaires. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1341—1343 (1948).

Die „Methode der Gewichtsfunktionen“, welche Ref. und Minnaert zur Berechnung schwacher Fraunhoferlinien bzw. der Flügel starker Linien entwickelt hatten, wird so verallgemeinert, daß sie die Ermittlung der Intensitätsverteilung und Äquivalentbreite beliebig starker Linien mit wahrer Absorption oder Streuung erlaubt.
A. Unsöld (Kiel).

Ferraro, V. C. A. and H. W. Unthank: On the solar electric field engendered by the rotation of the sun in its magnetic field. Monthly Not. astron. Soc., London 109, 462—470 (1949).

Die Rotation der Sonne oder eines Sterns in ihrem — als vorhanden angenommenen — allgemeinen Magnetfeld ergibt ein elektrostatisches Feld, dessen Potential jeweils längs einer magnetischen Kraftlinie konstant ist. Ist die Winkelgeschwindigkeit der Sonne nicht durchweg konstant, so sollte sie es doch auf einer Äquipotentialfläche des elektrischen Feldes sein. Die resultierenden Flächen- und

Raumladungen sowie das von deren Rotation herrührende Magnetfeld ergeben sich als verschwindend klein im Gegensatz zu früheren Rechnungen von L. Davis.

A. Unsöld (Kiel).

Poeverlein, Hermann: Strahlwege von Radiowellen in der Ionosphäre. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 175—201 (1949).

Die Arbeit behandelt die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen (geschichteten) ionisierten Medium (Ionosphäre), unter den Einfluß des Erdmagnetfeldes. Die gekrümmten Strahlwege werden nach den Methoden der geometrischen Optik mit Hilfe eines graphischen Verfahrens bestimmt. Die beiden Brechungsindizes (Doppelbrechung) sind gegeben durch:

$$(1) \quad n^2 = 1 - \frac{\omega_N^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_H^2 \sin^2 \alpha}{2(\omega^2 - \omega_N^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_H^2 \sin^2 \alpha}{2(\omega^2 - \omega_N^2)} \right)^2 + \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \cos^2 \alpha} \right)^{-1}.$$

ω_N enthält die Elektronendichte, welche mit der Höhe stetig zunimmt. α ist der Winkel zwischen den Wellennormalen und der Richtung des Erdmagnetfeldes, von dem also n auch abhängt. Die Richtung der Wellennormalen ergibt sich aus dem Brechungsgesetz (2): $n \sin \varphi = \sin \varphi_0$; φ = Winkel der Wellennormale gegen die Richtung senkrecht zur Schichtung (Vertikale), φ_0 = Einfallswinkel. — Da n nach (1) von der Richtung abhängt, ist es schwierig, φ aus (2) zu berechnen. Das graphische Verfahren geht wie folgt vor: Für eine bestimmte Frequenz, eine bestimmte Einfallsebene und für verschiedene Werte der Elektronendichte als Parameter stellt man n als Funktion von φ in Polarkoordinaten dar. Die Kurven (r = Radiusvektor) $r = n(\varphi)$ bringt man zum Schnitt einer vertikalen Geraden $r = \sin \varphi_0 / \sin \varphi$, die den Abstand $\sin \varphi_0$ vom Ursprungspunkt hat. Dann ist in den Schnittpunkten: $n(\varphi) = \sin \varphi_0 / \sin \varphi$, also das Brechungsgesetz erfüllt. Damit erhält man in den Schnittpunkten n und φ für die verschiedenen Elektronenkonzentrationen, also für verschiedene Höhen in der Ionosphäre. Es wird gezeigt, daß man die Strahlrichtung unmittelbar aus der graphischen Darstellung entnehmen kann, indem man in jedem Schnittpunkt zur $n(\varphi)$ -Kurve die Kurvennormale ermittelt. Man erhält für eine gegebene Elektronendichte je eine Strahlrichtung für die aufsteigende und die absteigende Welle. Nimmt man eine bestimmte Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Höhe an, so kann man die aufsteigenden Strahlrichtungen als Geradenstücke so aneinanderreihen, daß jede in die richtige Höhe kommt. — Von der größten erreichten Höhe setzt man die absteigenden Strahlrichtungen ebenso an. Den Polygonzug ersetzt man nachträglich durch eine Kurve. Berechnete Beispiele werden dargestellt und diskutiert, wobei sich bisher nicht bekannte Besonderheiten ergeben.

Lassen (Berlin).

Argence, Émile et Karl Rawer: Calcul du décrement d'absorption relatif à une couche ionosphérique parabolique dans le cas d'une incidence normale. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 996—997 (1949).

Für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in einer Schicht der Ionosphäre wird ein Dämpfungsfaktor wie folgt angegeben:

$$\delta_2 = \frac{v_g}{2c} \left(\frac{f_0}{f} \right)^2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{e^{-\xi/H} [1 - (\xi/\xi_m)^2] d\xi}{\sqrt{1 - (f_0/f)^2 [1 - (\xi/\xi_m)^2]}}.$$

Wird die Welle reflektiert, so ergibt sich folgendes Resultat:

$$\delta_2 = \frac{v_g}{4c\eta} \xi_m [(\eta^2 + 1) \Phi_0(\eta) - (\eta^2 - 1) \Phi_1(\eta)], \text{ worin } \eta = \frac{f_0}{f} \ (f < f_0)$$

$$\text{und: } \Phi_0(\eta) = \int_0^\tau e^{\omega \operatorname{ch} \theta} d\theta, \quad \Phi_1(\eta) = \int_0^\tau e^{\omega \operatorname{ch} \theta} \operatorname{ch} 2\theta d\theta \quad \text{mit } \tau = \log \sqrt{\frac{1+\eta}{\eta-1}}.$$

Wird die Schicht durchquert, so folgt:

$$\delta_2 = \frac{v_g}{4c\eta} \xi_m [(\eta^2 + 1) \psi_0(\eta) - (1 - \eta^2) \psi_1(\eta)]$$

mit:

$$\psi_0(\eta) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\bar{\omega} \operatorname{sh} \varphi} d\varphi, \quad \psi_1(\eta) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\bar{\omega} \operatorname{sh} \varphi} \operatorname{ch} 2\varphi d\varphi,$$

wobei $\tau_1 = \log \sqrt{(1-\eta)/(1+\eta)}$, $\tau_2 = \log \sqrt{(1+\eta)/(1-\eta)}$, ($\bar{\omega} = i\omega$). Lassen.